12) Мы видели уже в 9), что при $a>1$

$$\lim \frac{a^n}{n} = +\infty.$$

Этот результат с помощью теоремы Штольца получается сразу:

$$\lim \frac{a^n}{n} = \lim (a^n - a^{n-1}) = \lim a^n \left(1 - \frac{1}{a}\right) = +\infty.$$

То же относится и к примеру 11).

13) Применим теорему Штольца к доказательству следующего интересного предложения (Коши):

Если варианта a_n имеет предел (конечный или бесконечный), то тот же предел имеет и варианта

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

(«среднее арифметическое» первых n значений варианты a_n).

Действительно, полагая в теореме Штольца

$$x_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad y_n = n,$$

имеем:

$$\lim b_n = \lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim a_n.$$

Например, если мы знаем [10)], что $\sqrt[n]{n} \to 1$, то и

$$\frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n} \to 1.$$

14) Рассмотрим теперь варианту (считая k – натуральным)

$$z_n = \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}},$$

которая представляет неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Полагая в теореме Штольца

$$x_n = 1^k + 2^k + \ldots + n^k, \qquad y_n = n^{k+1},$$

будем иметь

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}.$$

Но

$$(n-1)^{k+1} = n^{k+1} - (k+1)\, n^k + \ldots,$$

так что

$$n^{k+1} - (n-1)^{k+1} = (k+1)\, n^k + \ldots$$

и [см. 2)]

$$\lim z_n = \lim \frac{n^k}{(k+1)\, n^k + \ldots} = \frac{1}{k+1}.$$

15) В заключение определим предел варианты

$$u_n = n\left(z_n - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1},$$

представляющей в первой форме неопределенность вида $\infty \cdot 0$, а во второй – вида $\infty - \infty$. Произведя вычитание дробей, получим на этот раз неопределенное выражение вида $\frac{\infty}{\infty}$:

$$u_n = \frac{(k+1)(1^k + 2^k + \ldots + n^k) - n^{k+1}}{(k+1)\, n^k}.$$