

Зимен математически турнир „Атанас Радев“

Сливен, 18-20 януари 2019 г.

Задача 8.1. а) Да се докаже, че произведение на четири последователни естествени числа не може да е точен квадрат на естествено число.

б) Да се намерят всички естествени числа n , за които числото $n^2 + 9n + 8$ може да се представи като произведение на четири последователни естествени числа.

Задача 8.2. Точките M , N и K са съответно върху страните AC , BC и AB на $\triangle ABC$, като K е среда на AB , а $MN \perp CK$. Ако $\angle NMC = \angle BKN$ и $\angle MNC = \angle AKM$, докажете, че отсечките AN , BM и CK се пресичат в една точка.

Задача 8.3. Да се докаже, че съществуват безброй много естествени числа a , такива че за всяко естествено число n числата $n^3 + 2018n + a$, $n^3 + 2019n + a$ и $n^3 + 2020n + a$ са съставни.

Задача 8.4. В долното ляво поле на дъска 7×9 е поставен пул. На всеки ход пулът се премества или две полета надясно, или две полета нагоре, или три полета наляво, или три полета надолу, или едно поле по диагонал нагоре-надясно, като не е разрешено да се поставя в полета, в които е бил по-рано. Колко най-много полета може да посети пулът?

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a , за които уравнението

$$|x|(x+1) = ax + a^2$$

има точно два различни реални корена.

Задача 9.2. Вписаната в остроъгълен триъгълник ABC окръжност се допира до страните AB и AC съответно в точките P и Q . Медианата CM пресича отсечката PQ в точка F . Да се докаже, че $AB = 2BC$ тогава и само тогава, когато BF е ъглополовяща на $\angle ABC$.

Задача 9.3. Да се намери най-малкото естествено число k , за което уравнението $x^3 + y^3 = k2019^{2018-k}$ има решение в цели числа.

Задача 9.4. Том играе компютърна игра, в която трябва да опази парче сирене от група от m мишки ($m \geq 3$ е естествено число). Сиренето е с формата на кръг с радиус 1 и център O , а мишките са точки в равнината на кръга. Първоначално мишките се намират в точки $A_1, A_2, \dots, A_m$, които се намират в ъгъл $\angle A_1OA_m = 90^\circ$. Всяко от разстоянията OA_i е точна степен на 2 като никое от лицата на триъгълниците OA_iA_{i+1} , $i = 1, 2, \dots, m-1$, не надминава $\frac{1}{2}$.

Задача 10.1. Да се намерят всички стойности на параметъра a , за които системата

$$\begin{cases} x^2 + 2ax - a^2 + 2 = 0 \\ y^2 + y - x = 0 \end{cases}$$

има точно две решения.

Задача 10.2. В остроъгълния триъгълник ABC медианата CM разделя $\angle ACB$ в отношение 2 : 1 ($\angle ACM = 2\angle MCB$). Описаната около триъгълник ABC окръжност с център O пресича за втори път описаната около триъгълник MOC окръжност в точка D . Да се докаже, че CD е ъглополовяща за $\angle ACM$.

Задача 10.3. Една редица a ще наричаме *самопресичаща се*, ако сумата на някои от нейните членове е равна на сумата на някои от другите ѝ членове, т.е. съществуват два по два различни индекси $i_1, i_2, \dots, i_s, j_1, j_2, \dots, j_r$, $s, r \geq 1$, такива че $a_{i_1} + \dots + a_{i_s} = a_{j_1} + \dots + a_{j_r}$. Например, редицата $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ е самопресичаща се, докато редицата $1, 3, 9, 27, 81, \dots$ не е. Да се намерят всички двойки естествени числа (α, β) , за които редицата: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+1} = \alpha a_n + \beta a_{n-1}$, $n \geq 2$, е самопресичаща се.

Задача 10.4. Виж Задача 9.4.

Задача 11.1. За кои стойности на реалния параметър a уравнението:

$$8^{x^2-x+a^2} - 2^{2x^2-x+2a^2-a+1} - 2^{x^2-2x+a^2+a+2} + 8 = 0$$

има точно три различни реални решения относно x ?

Задача 11.2. В окръжност k с радиус 1 е вписан триъгълник ABC . Точките I и I_a са съответно център на вписаната окръжност и център на външновписаната окръжност към страната BC на триъгълник ABC . Правата BI пресича AC в точка B_1 , а правата AI пресича BC в точка A_1 . Правата B_1A_1 пресича k в точки P и Q .

- Да се докаже, че точките I , I_a , P и Q лежат на една окръжност.
- Да се намери радиусът на описаната окръжност около триъгълник IPQ .

Задача 11.3. За естествено число n с $\tau(n)$ означаваме броя на естествените делители на n . Да се намерят всички естествени числа n , за които, ако $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ са всички делители на n , то:

$$\tau(d_1) + \tau(d_2) + \dots + \tau(d_k) = \tau(n^3).$$

Задача 11.4. В математическо състезание с 13 участници били дадени три задачи, като всяка задача се оценявала с 0 до 7 точки. След състезанието се оказало, че няма двама участници с равни резултати и по трите задачи. Да се докаже, че има трима ученици A , B и C , за които:

- A е получил не по-малко точки от B по първа задача;
- B е получил не по-малко точки от C по някоя от другите две задачи;
- C е получил не по-малко точки от A по останалата задача.

Задача 12.1. Нека $f_1(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ и $f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x))$, $n \in \mathbb{N}$. Да се пресметне

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=4}^k \frac{f_n(n-2) - 1}{n-3}.$$

Задача 12.2. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ с I и J са означени центровете на вписаните окръжности в $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$. Правата BI пресича страната AD и описаната окръжност около $\triangle ABD$ съответно в точки M и P , а правата BJ пресича страната CD и описаната окръжност около $\triangle CBD$ съответно в точки N и Q . Да се докаже, че $MN \parallel PQ \Leftrightarrow IJ \parallel PQ$.

Задача 12.3. За естествено число n с $\tau(n)$ означаваме броят на естествените делители на n . Да се намерят всички естествени числа n , за които ако $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ са всички негови делители, то:

$$\tau(d_1) + \tau(d_2) + \dots + \tau(d_k) = \tau(n^3).$$

Задача 12.4. Нека $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ е такава функция, че $f(tz) = |t|f(z)$ и $f(z+w) \leq f(z) + f(w)$ за произволни $t \in \mathbb{R}$ и $z, w \in \mathbb{C}$. Да се докаже, че съществува $c \in \mathbb{C}$ така, че $c \neq 0$ и $f(pc) + f(iqc) \leq 3f(pc + iqc)$ за всеки $p, q \in \mathbb{R}$.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.3 – Иван Тонов; 8.2 – Емил Стоянов; 8.4 – Ивайло Кортезов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.3 – Петър Бойваленков; 9.4=10.4, 11.1 – Стефан Герджиков; 10.2 – Диана Данова / Станислав Харизанов; 10.3 – Станислав Харизанов; 10.1, 11.3=12.3 – Александър Иванов; 11.2, 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.4 – Николай Николов