68. Национална олимпиада по математика

Първи ден, 13 април 2019 г.

Задача 1. (Д. Данова, Н. Николов) Нека $f(x) = x^2 + bx + 1$, където b е реален параметър. Да се намери броят на целочислените решения на неравенството $f(f(x) + x) < 0$.

Задача 2. (Е. Колев) Даден е остроъгълен триъгълник ABC с ортоцентър H и център на описаната окръжност O. Симетралата на CH пресича страните AC и BC съответно в точки X и Y. Правите XO и YO пресичат страната AB съответно в точки P и Q. Ако $XP + YQ = AB + XY$ да се намери $\measuredangle OHC$.

Задача 3. (А. Иванов, С. Харизанов) Да се намерят всички реални числа a със следното свойство: за всяка безкрайна редица $a_1, a_2, a_3, \ldots$ от две по две различни естествени числа, за която неравенството $a_n \leq an$ е изпълнено за всяко естествено число n, съществуват безбройно много членове на редицата със сума на цифрите в бройна система с основа 4038, която не е кратна на 2019.

68. Национална олимпиада по математика

Втори ден, 14 април 2019 г.

Задача 4. (П. Бойваленков, Е. Колев, С. Харизанов) Да се намерят всички естествени числа d, за които съществува естествено число $k \geq 3$, такова, че числата $d, 2d, 3d, \ldots, kd$ могат да се наредят в редица със следното свойство: сумата на всеки две съседни числа е точен квадрат.

Задача 5. (А. Иванов, С. Харизанов) В изпъкнал 2019-ъгълник са построени всички диагонали, като никои три от тях не се пресичат в една точка. Пресечна точка на два диагонала, вътрешна за многоъгълника, се нарича *възел*. Колко най-много възли могат да се оцветят, така че да не съществува цикъл с оцветени възли, всеки два последователни от които да са върху един и същи диагонал?

Задача 6. (А. Иванов, С. Герджиков) Даден е шестоъгълник $ABCDEF$, вписан в окръжност, за който

$$AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AF.$$

Нека точките B и B_1 са симетрични относно правата AC, D и D_1 са симетрични относно CE, F и F_1 са симетрични относно EA. Да се докаже, че $\triangle B_1D_1F_1$ е подобен на $\triangle BDF$.