Вторник, 16 юли, 2019

Задача 1. Нека $\mathbb{Z}$ е множеството от целите числа. Да се намерят всички функции $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, такива че, за всяка двойка цели числа a и b е в сила равенството

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)).$$

Задача 2. В триъгълник ABC, точка A_1 лежи на страната BC, а точка B_1 лежи на страната AC. Нека P и Q са точки съответно върху отсечките AA_1 и BB_1, такива, че PQ е успоредна на AB. Нека P_1 е точка от правата PB_1, така че B_1 е строго между P и P_1, и $\angle PP_1C = \angle BAC$. Аналогично, нека Q_1 е точка от правата QA_1, така че A_1 е строго между Q и Q_1, и $\angle CQ_1Q = \angle CBA$.

Да се докаже, че точките P, Q, P_1 и Q_1 лежат на една окръжност.

Задача 3. Една социална мрежа има 2019 потребителя, част от които са приятели в нея. Когато потребител A е приятел с потребител B, то и потребител B е приятел с потребител A. Събития от следния тип могат да се случват неколкократно, но никога едновременно:

> Три потребителя A, B, и C, такива, че A е приятел и с B и с C, но B и C не са приятели помежду си, изменят приятелските си статуси така, че B и C стават приятели, докато A вече не е приятел нито с B, нито с C. Статусите на всички останали приятелства се запазват.

Първоначално, 1010 от потребителите имат по 1009 приятеля всеки, а 1009 от потребителите имат по 1010 приятеля всеки. Да се докаже, че съществува последователност от такива събития, след която всеки потребител е приятел с най-много един от останалите потребители.

Language: Bulgarian

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Сряда, 17 юли, 2019

Задача 4. Да се намерят всички двойки естествени числа (k, n), за които

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\cdots(2^n - 2^{n-1}).$$

Задача 5. Банката на Бат е издала серия монети, които имат H на едната си страна и T на другата страна. Хари разполага с n от тези монети, наредени в линия отляво надясно. Докато може, той извършва следната операция: ако точно $k > 0$ от монетите са с H нагоре, Хари обръща k-тата монета отляво надясно; в противен случай всички монети са с T нагоре и той спира. Например, при $n = 3$ процесът, стартиращ с конфигурацията THT изглежда така: $THT \to HHT \to HTT \to TTT$, и след три операции Хари спира.

(а) Да се докаже, че независимо от първоначалната конфигурация, Хари спира след краен брой операции.

(б) Нека за всяка начална конфигурация C означим с $L(C)$ броят извършени операции преди Хари да спре. Например, $L(THT) = 3$, а $L(TTT) = 0$. Да се намери средната стойност на $L(C)$ върху всички 2^n възможни начални конфигурации C.

Задача 6. Нека I е центърът на вписаната окръжност ω за остроъгълния триъгълник ABC, за който $AB \neq AC$. Окръжността ω се допира до страните BC, CA и AB, съответно в точките D, E и F. Правата през D, перпендикулярна на EF пресича ω за втори път в точката R. Правата AR пресича ω за втори път в точката P. Описаните окръжности около триъгълниците PCE и PBF се пресичат за втори път в точката Q.

Да се докаже, че правите DI и PQ се пресичат върху правата през A, перпендикулярна на AI.