

Съюз на математиците в България
Американска фондация за България
Фондация Георги Чиликов

Есенен математически турнир ”Академик Стефан Додунеков”

София-Плевен, 8-11 ноември 2019 г.

София, 2019 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Пети клас

Задача 5.1. Числото A е сумата от последните четири цифри на стойността на израза

$$9 + 99 + 999 + \dots + \underbrace{99 \dots 9}_{2019},$$

а числото B е сбора на числата в таблицата

1990	1991	1992	...	2018	2019
1991	1992	1993	...	2019	2020
1992	1993	1994	...	2020	2021
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2018	2019	2020	...	2046	2047
2019	2020	2021	...	2047	2048

Ако числото C е сумата от цифрите на числото B , да се сравнят числата A и C .

Задача 5.2. Да се реши ребуса

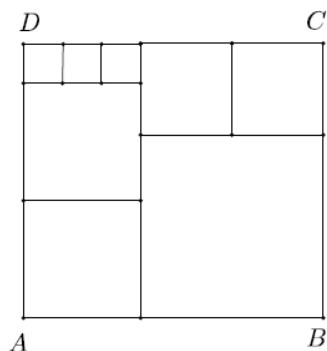
$$\text{КОЛЕВ} + \text{КОЛЕВ} + \text{КОЛЕВ} = \text{ПЛЕВЕН}$$

На различните букви отговарят различни цифри, а на еднаквите букви отговарят еднакви цифри.

Задача 5.3. Правоъгълникът $ABCD$ на чертежа е съставен от осем квадрата. Страната на всеки квадрат се измерва с точен брой сантиметри. Лицето на правоъгълника $ABCD$ е равно на 7728 кв.см.

а) Да се намери обиколката на правоъгълника $ABCD$.

б) Един от осемте квадрата, от които е съставен правоъгълникът $ABCD$, е изрязан и останалата фигура има обиколка 424 см. Да се намери лицето на тази фигура.



Задача 5.4. Иван и Стоян се разбрали да продават шапки и тениски за ЕМТ. Когато сутринта Стоян пристигнал със закъснение Иван му се похвалил, че вече направил една продажба на стойност 49 лв и втора на стойност 71 лв. Стоян се замислил и казал, че това е невъзможно. Двамата седнали да смятат и установили, че няма комбинация от тениски и шапки (не непременно от двата артикула) на стойност 49 лв, както и няма комбинация на стойност 71 лв. Оказало се обаче, че има комбинация от поне два артикула (не непременно различни) с цена 23 лв. Намерете цената на една шапка и цената на една тениска ако знаете, че шапката е по-евтина от тениската. (Цените на артикулите са цели числа в левове).

Шести клас

Задача 6.1. Дадени са правоъгълници с размери $1 \times 1, 1 \times 2, \dots, 1 \times k$, по един от всеки вид, където k е естествено число. Възможно ли е от дадените правоъгълници (като се използват всичките), да се съставят два правоъгълника с равни лица, ако:

- а) $k = 7$; б) $k = 8$; в) $k = 9$?

Задача 6.2. Даден е правоъгълен паралелепипед. Известно е, че ако едно от измеренията му се увеличи с 2 см, то обемът му се увеличава с 8 см^3 , ако друго се увеличи с 3 см, то обемът му се увеличава с 36 см^3 , и ако третото се увеличи с 4 см, то обемът се увеличава с 12 см^3 .

- а) Да се намерят обемът и пълната повърхнина на паралелепипеда.
б) Ако измеренията на паралелепипеда са естествени числа и в него е налята вода с обем 3 см^3 , с колко ще се покачи нивото на водата, ако на дъното на паралелепипеда се постави метално кубче с ръб 1 см^3 ?

Задача 6.3. Естествените числа $1, 2, \dots, 2019$ са оцветени в синьо или зелено по следното правило: ако съществуват естествени числа a и b , за които $a^3 - b! = x$, то x се оцветява в синьо. В противен случай x се оцветява в зелено. Кои числа са повече – сините или зелените?

Задача 6.4. От 10 ученици двама са без домашно по математика. За една минута учителят може да избере произволни четирима и да разбере дали между тях има ученик без домашно. Най-малко за колко минути със сигурност учителят може да разбере кои двама са без домашно?

Седми клас

Задача 7.1. а) Да се пресметне нормалният вид на изразите:

$$A = \frac{4^4 \cdot 50}{2^2 \cdot 20^3} x + (0,6x + 1)^2 + (0,8x - 1)^2$$

$$B = (3x + 1)^2 + (2 + 3x)(2 - 3x).$$

б) Да се докаже, че за всяка стойност на x стойността на $A + B$ е по-голяма или равна на -2 .

Задача 7.2. Даден е триъгълник ABC . Точка M от страната AC е такава, че $MC = 2 \cdot AM$, а точка N от страната BC е такава, че $NC = 3 \cdot NB$. Точката P е средата на MN .

а) Да се намери отношението на лицата на триъгълниците AMP и BNP .

б) Ако лицето на триъгълника ABP е равно на 1001, да се намери лицето на триъгълника ABC .

Задача 7.3. Да се намери броят на естествените числа n с точно 2019 различни естествени делители

$$1 = d_1 < d_2 < d_3 < d_4 < \dots < d_{2018} < d_{2019} = n,$$

ако е известно, че $d_{2018} \cdot d_4 = 5n$.

Задача 7.4. В група от 2019 човека всеки е приятел с поне 673 от останалите. Да се докаже, че е възможно да разпределим хората в няколко стаи така, че едновременно да имаме:

- (1) във всяка стая има поне двама души,
- (2) за всяка стая, в която има двама души, те са приятели,
- (3) за всяка стая, в която има повече от двама души, най-много двама от хората в стаята не са приятели?

Остава ли вярно твърдението, ако 673 се замени с 672?

Осми клас

Задача 8. 1. Да се намерят всички цели стойности на x , за които стойността на израза

$$M = |x^3 - 2x^2 - 10x + 8|$$

е просто число.

Задача 8. 2. Даден е триъгълник ABC . В полуравнината с контур правата BC , несъдържаща точка A , е взета точка P , така че $CP \perp BC$ и $CP = BC$, а в полуравнината с контур правата AC , несъдържаща точка B , е взета точка Q , така че $CQ \perp AC$ и $CQ = AC$. Точка F от отсечката AP е такава, че $\sphericalangle CFP = \sphericalangle BQP$.

а) Да се докаже, че CF разполовява страната AB .

б) Нека AP пресича BC в точка N . Ако $CN : BN = 1 : 2$, да се намери отношението $AF : FN$.

Задача 8. 3. Да се намерят всички естествени числа p и n , такива че p е просто и

$$p^3 + 5n - 1 = n(p^2 + 2p + 6n).$$

Задача 8. 4. На дъска е записано по един път всяко трицифрено число, имащо сбор на цифрите 12. При първия ход се изтриват всички числа, които съдържат една или повече от цифрите 0, 8 и 9. При всеки следващ ход се изтриват по три числа, такива че цифрите на една от позициите им съвпадат, а във всяка от останалите две позиции се различават с 1 или с 2. Ако накрая на дъската останало само едно число, то кое може да е то?

Девети клас

Задача 9. 1. При кои стойности на параметъра m , уравнението

$$(x^2 - x - 6)(x^2 - 7x + 6) = m^2 - 15m$$

има два различни положителни и два различни отрицателни корена?

Задача 9. 2. Даден е триъгълник ABC , в който медианите AA_1 и BB_1 се пресичат в точка G . Ако вписаната в триъгълник ABC окръжност и вписаната в триъгълник AGB окръжност се допират до страната AB в една и съща точка, да се докаже, че триъгълник ABC е равнобедрен.

Задача 9. 3. На дъска първоначално е записано числото r^n , където $r > 0$ е рационално число, а $n > 1$ е естествено число. Всяка минута Иван избира две (не непременно различни) числа a и b , записани на дъската, и дописва числата $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a}{b}$. Да се намерят всички стойности на n , за които съществува r , така че е възможно в даден момент върху дъската да се появи числото 17.

Задача 9. 4. В равнината са дадени окръжност ω с център точката O с координати $(0, 0)$ и радиус $R = 1$, и точката A с координати $(1, 1)$. Да се намерят всички точки B , за които съществуват (не непременно две по две различни) точки $P_1, P_2, \dots, P_{2018}$, такива че всяка от средите на 2019-те отсечки $AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_{2017}P_{2018}$ и $P_{2018}B$ лежи върху ω .

Десети клас

Задача 10. 1. Дадени са квадратните функции

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad \text{и} \quad g(x) = x^2 + bx + a$$

с реални параметри a и b . Известно е, че уравнението $f(x)g(x) = 0$ има четири различни реални корена и тяхното произведение е 10. Ако графиките на функциите $f(x)$ и $g(x)$ се пресичат в единствена точка A и тя е на разстояние $\sqrt{65}$ от началото на координатната система, да се намерят a и b .

Задача 10. 2. Точките P , Q и R съответно от страните BC , CA и AB на триъгълник ABC са такива, че правите AP , BQ и CR се пресичат в точка S . Ако

$$S_{ABS} = S_{QSPC} \quad \text{и} \quad \frac{S_{ARC}}{S_{BRC}} = \frac{|CA|^4}{|BC|^4},$$

да се докаже, че четириъгълникът $ABPQ$ е вписан в окръжност.

Задача 10. 3. Нека $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ е редицата:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = 3x_{n+1} + x_n \quad \text{за} \quad n \geq 0.$$

Да се намерят всички прости числа $p \in [2000; 2100]$, чийто десетичен запис завършва на 9 и $p|x_{p-1}$.

Задача 10. 4. В едно училище, в школата за десети клас по математика участват 22-ама десетокласници. Някои от тях са *приятели* в новата социална платформа Графнет, а други – не.

Известно е, че ръководителят на школата не може да даде за домашно 10 различни задачи, по една на всеки ученик, така че всеки двама *приятели* в Графнет да получат различна задача.

Да се намери възможно най-големият брой групи от десетокласници, някои двама от които не са приятели в Графнет, за които това може да се случи.

Единадесети клас

Задача 11. 1. Даден е $\triangle ABC$. Нека $\sphericalangle ACB = 45^\circ$, $AB = \sqrt{2}$ и $BM = m$, където M е средата на AC .

а) Ако $\alpha = \sphericalangle BAC$, да се изрази m като функция на $\operatorname{ctg} \alpha$.

б) Да се намерят всички стойности на m , за които $\sphericalangle BAC$ е еднозначно определен.

Задача 11. 2. Да се реши системата:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 3 \\ \sqrt{y} + z = 3 - \sqrt{2} \\ \sqrt{z} + x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

Задача 11. 3. Нека $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ е редицата:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+2} = 3x_{n+1} + x_n \text{ за } n \geq 0.$$

Да се намерят всички прости числа $p \in [2000; 2100]$, чийто десетичен запис завършва на 9 и $p \mid x_{p-1}$.

Задача 11. 4. Нека p е просто число. Разглеждаме множествата

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, x \neq (0, 0, 0)\}$$

и първата различна от 0 координата на x е 1} и

$$Y = \{y = (y_1, y_2, y_3) \mid y_i \in \{p, p+1, \dots, 2p-1\}, y \neq (p, p, p)\}$$

и първата различна от p координата на y е $p+1$.

Нека $G = (V, E)$ е граф с множество от върхове $V = X \cup Y$ и множество от ребра

$$E = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \equiv 0 \pmod{p}\}.$$

Едно множество от върхове U ($U \subseteq V$) ще наричаме *представително* за V , ако всеки връх от V се съдържа в U или е съседен (свързан с ребро) с връх от U . Да се намери минималният брой върхове в едно представително множество за V .

Дванадесети клас

Задача 12. 1. Нека $a_1, a_2, \dots$ е такава редица от реални числа, че

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{\cos(\pi a_n)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Да се докаже, че редицата е сходяща и да се намери границата ѝ.

Задача 12. 2. Нека O е центърът на описаната окръжност около остроъгълен $\triangle ABC$, а M и N са средите на страните AB и BC . Правата CO разполовява отсечката MN . Да се намери най-малката възможна стойност на $\sphericalangle BAC$.

Задача 12. 3. Дадено е естествено число $n \geq 2$. Да се намери най-малката възможна стойност на сума от вида

$$\sum_{i=1}^n a_i(2 + a_{i-1})(a_i - a_{i-1}),$$

където $a_0 = 0$, $a_n = 1$ и $a_1, \dots, a_{n-1} \in [0, 1]$.

Задача 12. 4. Нека p е просто число. Разглеждаме множествата

$$X = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, x \neq (0, 0, 0)\}$$

и първата различна от 0 координата на x е 1} и

$$Y = \{y = (y_1, y_2, y_3) \mid y_i \in \{p, p+1, \dots, 2p-1\}, y \neq (p, p, p)\}$$

и първата различна от p координата на y е $p+1$.

Нека $G = (V, E)$ е граф с множество от върхове $V = X \cup Y$ и множество от ребра

$$E = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y, x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \equiv 0 \pmod{p}\}.$$

Едно множество от върхове U ($U \subseteq V$) ще наричаме *представително* за V , ако всеки връх от V се съдържа в U или е съседен (свързан с ребро) с връх от U . Да се намери минималният брой върхове в едно представително множество за V .

Задачите са предложени, както следва: 5.1 – Стоян Ненков, 5.2 и 5.4 – Иван Ангелов, 5.3 и 7.2 – Невена Събева, 6.1 и 6.3 – Петър Бойваленков, 6.2 – Диана Данова, 6.4, 7.1. и 7.3. – Емил Колев, 7.4 – Александър Иванов.

8.1, 8.2 – Таня Стоева; 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов; 9.1, 9.2 – Диана Данова; 9.3 – Александър Иванов и Станислав Харизанов; 9.4 – Кирил Бангачев и Станислав Харизанов; 10.1, 10.3, 10.4 – Стефан Герджиков; 10.2 – Емил Колев; 11.1 – Стоян Боев; 11.2, 11.4 – Иван Ланджев; 12.1, 12.2, 12.3 – Николай Николов;

