

Теорема 2. Нека $f(x)$ е интегрируема, а $g(x) \searrow$ е монотонна в $[a, b]$. Тогава $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx$$

Доказателство: Нека $\tau : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ е деление на $[a, b]$ и $g(x)$ намалява или евентуално е константа в този интервал. Функцията $f(x)g(x)$ е интегрируема в качеството си на произведение на две интегрируеми функции. Нека $M_k := \sup_{x \in [a, b]} f(x)$, $m_k := \inf_{x \in [a, b]} f(x)$. Оценяваме отгоре и отдолу интегралната сума: $\sum_{k=1}^n f(x_{k-1})g(x_{k-1})\Delta x_k$.

$$\sum_{k=1}^n m_k g(x_{k-1})\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})g(x_{k-1})\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M_k g(x_{k-1})\Delta x_k$$

, съгласно $m_k \leq f(x_{k-1}) \leq M_k$. От първата теорема за средните стойности следва, че можем да изберем такива числа $\mu_k : m_k \leq \mu_k \leq M_k$, че да имаме:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \mu_k \Delta x_k$$

за всички $1 \leq k \leq n$. Разглеждаме функцията $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

за $x \in [a, b]$. Тя е добре дефинирана и нейната непрекъснатост може да бъде доказана или по Първата теорема за средните стойности съгласно:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt \right| = \left| \int_y^x f(t)dt \right| = |f(\zeta)(x - y)| \quad (1)$$

за $\zeta, x, y \in [a, b]$, взимайки предвид това, че $f(x)$ е интегрируема следва нейната ограниченост $x \in [a, b], |f(x)| \leq C$, за някоя константа $C > 0$, използвайки го в (1), извеждаме, че за функцията $F(x)$ е изпълнено условието на Липшиц, което доказва нейната непрекъснатост в $[a, b]$

Разглеждаме числата:

$$S_i = \sum_{k=1}^i \mu_k \Delta x_k = \int_{x_0}^{x_1} f(t) dt + \dots + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t) dt = \sum_{k=1}^i \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt = \int_a^{x_i} f(t) dt =: F(x_i)$$

Сега, ако $M := \sup_{x \in [a, b]} F(x)$ и $m := \inf_{x \in [a, b]} F(x)$, то $m \leq F(x_i) \leq M$

$\Rightarrow m \leq S_i \leq M$ комбинирано с числата $\mu_k, g(x_{k-1})$, съгласно $g(x_k) \leq g(x_{k-1}) \leq \dots$ Прилагаме Лемата на Абел за $S_i, \mu_k, g(x_{k-1})$ и получаваме:

$$mg(a) \leq \sum_{k=1}^n g(x_{k-1}) \mu_k \Delta x_k \leq Mg(a) \Big|_{\lim_{diam(\tau) \rightarrow 0}}$$

И след граничен преход в горните неравенства, получаваме:

$$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(a) \Rightarrow m \leq \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \quad (2)$$

Забелязваме, че от непрекъснатостта на $F(x)$ в $[a, b]$ всяка стойност α между $m \leq \alpha \leq M$ е функционална за $F(x)$. С други думи от (2) стигаме до извода, че има някое $\xi \in [a, b]$, такова, че :

$$F(\xi) = \int_a^{\xi} f(t)dt = \frac{1}{g(a)} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Тоест когато $g(x)$ не расте и е неотрицателна функция в $[a, b]$ извеждаме, че $\exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^{\xi} f(x)dx \quad (3)$$

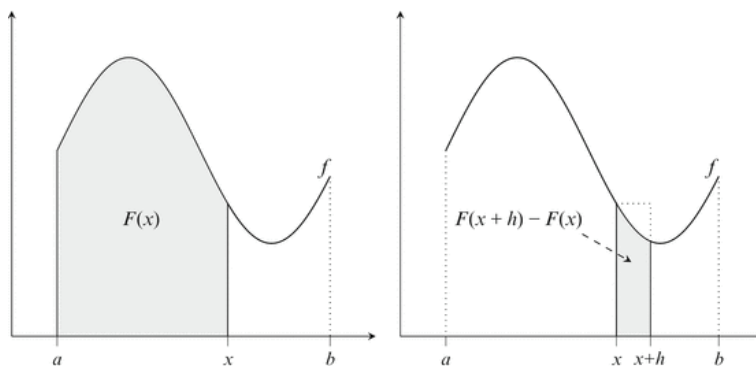
Кое е достатъчно да докажем теоремата, защото ако се случи така, че $g(x)$ е нарастваща, но не навсякъде неотрицателна, бихме имали $g(x) \geq g(b)$, т.е функцията $h(x) := g(x) - g(b) \geq 0$ е неотрицателна и прилагаме за нея получения резултат (3) извеждаме по-общата формула:

$$\int_a^b f(x)h(x) \underset{(3)}{=} h(a) \int_a^{\xi} f(x)dx = (g(a) - g(b)) \int_a^{\xi} f(x)dx$$

$$\begin{aligned}
& \int_a^b f(x)(g(x) - g(b)) = g(a) \int_a^\xi f(x)dx - g(b) \int_a^\xi f(x)dx \\
& \int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_a^b f(x)dx + g(a) \int_a^\xi f(x)dx - g(b) \int_a^\xi f(x)dx \\
& \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx \square
\end{aligned}$$

Сега сме готови да продължим с най-впечатляващия резултат, даващ връзката между лицето под крива - определен интеграл и примитивната на функция - неопределен интеграл.

Наблюдение:



Фигура 1: Теорема на Нютон-Лайбниц

Нека разгледаме отново функцията $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

Тази функция представлява лицето на криволинейният трапец разширен на Фиг. 1(вляво). Използвайки само геометрични наблюдения ще се убедим, че функцията $F(x)$ е една от примитивните функции на $f(x)$, т.е., че $F'(x) = f(x)$. Нека вземем произволно малко число $h > 0$. Тогава разликата $F(x+h) - F(x)$ представлява лицето на "тесния" криволинейен трапец заширихван на Фиг.1(вдясно). Наистина:(отново тук използваме само геометрични наблюдения)

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Ако $f(x)$ е непрекъсната в $[a, b]$, т.е. функционалните стойности на $f(x)$ се изменят малко при малки изменения на аргумента. Тогава лицето на правоъгълника с основа x и $x+h$ и височина $f(x)$, т.е. правоъгълника с лице $f(x).h$ (съгласно това, че дължината на основата е $x+h-x=h$). Тоест лицето на този правоъгълник ще се отличава малко от лицето на "тесния" криволинейен трапец при много близки до нулата стойности на h . Тоест, ако пуснем h да клони към нула имаме: $S_{rectangle} - S_{trapezoid} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

Или в означенията от по-горе имаме:

$$(F(x+h) - F(x)) - f(x)h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$F(x+h) - F(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)h \Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

Но сега забелязваме, че полученото частно е точно диференчното частно за функцията $F(x)$ т.е. получаваме, че: $F'(x) = f(x)$ което искахме да покажем. Тоест наистина функцията $F(x)$ е една от примитивните на $f(x)$. Но тогава всяка примитивна $\Phi(x)$ на $f(x)$ ще се различава само с константа от $F(x)$, т.е.:

$$\Phi(x) = F(x) + C = \int_a^x f(t)dt + C$$

Сега даваме стойност на x първо b и после a за да изразим:

$$\left| \begin{array}{l} \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C \\ \Phi(a) = \int_a^a f(t)dt + C \\ \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{{=0}} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + C \\ \Phi(a) = 0 + C \end{array} \right.$$

изваждаме второто уравнение от първото и получаваме формулата на Нютон-Лайбниц.

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx + C - C = \int_a^b f(x)dx$$

Тоест за да пресметнем определен интеграл от непрекъсната функция в краен и затворен интервал $[a, b]$ е достатъчно да намерим нейна примитивна $\Phi(x) = \int f(x)dx$ и да пресметнем нейната стойност в точката $x = b$ и точката $x = a$. С други думи. Ако функцията $f(x)$ е непрекъснатата навсякъде в $[a, b]$ можем да пресметнем:

$$\int_a^b f(x)dx = \Phi(x) \Big|_a^b$$

Забележка: Вече знаем, че ако функцията $f(x)$ е интегрируема в $[a, b]$, то функцията $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ е непрекъсната в $[a, b]$. (виж условията на Липшиц)

Сега сме готови да изложим строгото доказателство на:

Теорема на Нютон-Лайбниц: Ако функцията $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е интегрируема навсякъде в крайния и затворен интервал $[a, b]$. Тогава производната на функцията $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ съществува във всяка точка

на непрекъснатост $x_0 \in [a, b]$ на $f(x)$. Тоест винаги щом $f(x)$ е непрекъснатата в точка $x_0 \in [a, b]$ имаме $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказателство: От непрекъснатостта на $f(x)$ в $x_0 \in [a, b]$ (виж определение за непрекъснатост в точка). Имаме, че за всяко положително число $\varepsilon > 0$ съществува такова положително число $\delta > 0$, че винаги щом е изпълнено $|x - x_0| < \delta$ да следва $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (Тоест за близки до x_0 хиксове, функционалните стойности също да са близки. Точно както в наблюдението използвахме, че за малко изменение на аргумента функционалната стойност ще се измени малко). Отново разглеждаме диференчното частно на $F(x)$, но този път ще докажем, че и при $h > 0$ и при $h < 0$, т.е. ще пуснем h да клони към нула отляво и отдясно. Това ще се отрази с многобройните модули, които ще видите по-надолу...

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx - f(x_0)h \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dx \right) = \frac{1}{h} \left(\int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0)) dx \right) \end{aligned}$$

Сега за да не оценяваме два пъти неравенствата с $h > 0$ и $h < 0$ разглеждаме в един случай, като слагаме модул $|h|$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(x) - f(x_0)) dx \right| \leq \quad (4) \\ &\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)| dx \right| \end{aligned}$$

Защо правихме тези "гимнастики е добър въпрос на този момент. И отговора е, че искаме да си нагласим да имаме $|f(x) - f(x_0)|$, като подинтегралната функция, защото знаем, че за $(\dots)|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon(\dots)$ за да можем да използваме непрекъснатостта на $f(x)$ в точката x_0 . Сега в (4) използваме непрекъснатостта на $f(x)$ в точката x_0 както е описано в началото на доказателството. Тоест Фиксираме произволно $\varepsilon > 0$ и

намираме $\delta > 0$ такава ,че от $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$\leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)| dx \right| < \frac{1}{|h|} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dx \right| = \frac{1}{|h|} \varepsilon |h| = \varepsilon$$

. Тоест от това, че в разсъжденията избора на епсилон няма значение следва, че $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$0 \leq \left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Но единственото число, по-голямо или равно на нула и по-малко от всяко положително число е точно нула. Тоест числото, което пише в модула е равно на нула при достатъчно малки стойности на h .

$$\Rightarrow F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Тоест $F'(x_0) = f(x_0)$ $\square$

Второ доказателство на Теоремата на Нютон-Лайбниц:

Поради непрекъснатостта на $f(x)$ в x_0 за всяко $\varepsilon > 0$ съществува такава $\delta > 0$, че винаги щом е изпълнено $|x - x_0| < \delta$ да следва $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$

Но тогава за всички $t \in [x_0, x]$ имаме:

$$|t - x_0| \leq |x - x_0| < \delta$$

$$|t - x_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon < f(t) < f(x_0) + \varepsilon$$

Сега функцията $f(t) : [x_0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ е ограничение на оригиналната f върху $[x_0, x] \subseteq [a, b]$ и следователно тя е интегрируема. Затова имаме право да интегрираме последните получени неравенства.

$$\int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon) dt < \int_{x_0}^x f(t) dt < \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon) dt \quad (5)$$

Но понеже $f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon - const$ са константи имаме:

$$\int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon) dt = (f(x_0) - \varepsilon)(x_0 - x)$$

$$\int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon) dt = (f(x_0) + \varepsilon)(x_0 - x)$$

Т.к. интегрирайки константа просто намираме лицето на правоъгълник. И така неравенствата (5) се превръщат в:

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x_0 - x) < \int_{x_0}^x f(t) dt < (f(x_0) + \varepsilon)(x_0 - x)$$

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt < f(x_0) + \varepsilon \quad (6)$$

Сега забелязваме, че $\frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$, комбинирано с (6)

получаваме, че всеки път щом $|x - x_0| < \delta$

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} < f(x_0) + \varepsilon$$

Или с други думи. За всяко $\varepsilon > 0$ има $\delta > 0$ такова, че от $|x - x_0| < \delta$ да имаме:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Кое по определение означава, че: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ И доказва,

че функцията $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ има производна във всяка точка, в която подинтегралната функция f е непрекъсната и $F'(x_0) = f(x_0)$ $\square$

Забележка 1: Да забележим, че във второто доказателство, твърде свободно не се интересуваме от знака $\text{sign}(x - x_0)$, защото при евентуална смяна на знака на $x - x_0$, едновременно с това бихме имали и смяна на знака $\text{sign} \left(\int_{x_0}^x f(t) dt \right)$. Така всички гореизведени неравенства са в сила независимо от знака $\text{sgn}(x - x_0)$.

Забележка 2: Теоремата, която доказахме може да се изкаже и в "по-силен" вид. Като се обобщи за функцията $F(x) = \int_p^x f(t) dt$, за някоя точка $p \in [a, b]$. Лесно се проверява, че за тази функция са изпълнени същите неравенства, които доказахме във второто доказателство. И накрая ще изкажем следното

Следствие: Ако една функция е $f(x)$ интегрируема в $[a, b]$ и непрекъсната в него, то функцията $F(x)$ е диференцируема и $F'(x) = f(x)$