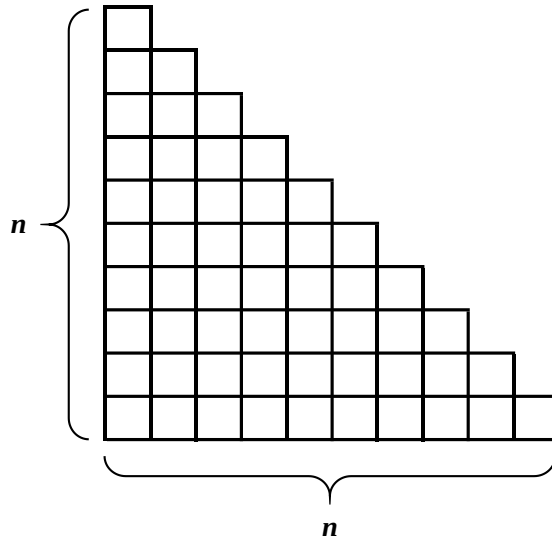


Решение:

Ще докажем, че броя на правоъгълниците, страните на които лежат на линиите на фигурата е равен на

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$$

За краткост ще наричаме фигурата ъгъл с размер n и нека завъртим ъгъла така, че единичните квадратчета да се разположат в хоризонтални редове и вертикални колони.



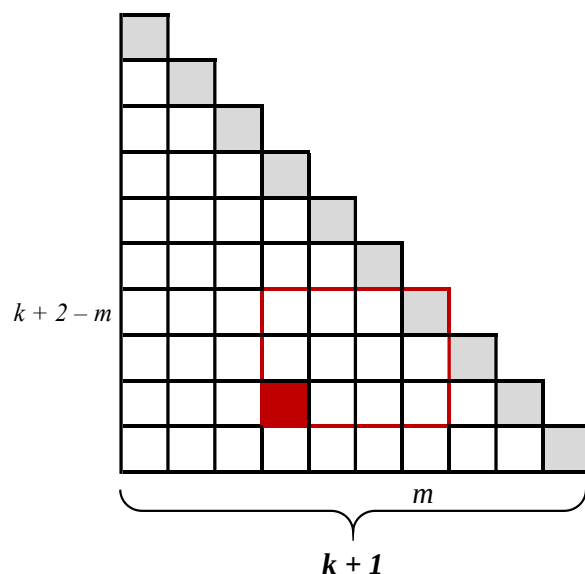
Доказателството ще извършим по индукция.

При $n = 1$ имаме един възможен правоъгълник и понеже $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{24} = 1$, то твърдението е изпълнено.

Нека за някое $k \in \mathbb{N}_+$ броят различни правоъгълници, които се съдържат в ъгъл с размер k е равен на $\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24}$.

Разглеждаме ъгъл с размер $k + 1$.

Той се получава като към ъгъл с размер k добавим $k + 1$ единични квадратчета, разположени по главния диагонал на по-големия ъгъл.



Следователно, броят различни правоъгълници, които се съдържат в ъгъл с размер $k + 1$ е равен на сумата от броя на правоъгълниците, които се съдържат в ъгъл с размер k и броя на правоъгълниците, които съдържат квадратче от главния диагонал на ъгъла с размер $k + 1$.

Нека разгледаме произволно квадратче от главния диагонал, което е в колона m и ред $k + 2 - m$, $m = 1, 2, \dots, k + 1$.

Търсим броя на различните правоъгълници, които се съдържат в правоъгълника с размери $m \times k + 2 - m$ и чийто горен десен ъгъл е квадратчето от главния диагонал.

Броят на тези правоъгълници е равен на броя начини, по които може да изберем квадратче за долен ляв ъгъл на такъв правоъгълник. На всеки избор на долен ляв ъгъл отговаря точно един възможен правоъгълник и на всеки правоъгълник отговаря само една възможност за долен ляв ъгъл.

Следователно, броят на различните правоъгълници, които се съдържат в правоъгълника с размери $m \times k + 2 - m$ и чийто горен десен ъгъл е квадратчето от главния диагонал е равен на $m(k + 2 - m)$.

Броят на всички правоъгълници, в ъгъл с размер $k + 1$, които съдържат квадратче от неговия главен диагонал е равен на

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{k+1} m(k+2-m) &= 1 \cdot (k+2-1) + 2 \cdot (k+2-2) + \dots + i(k+2-i) + \dots + k(k+2-k) + \\ &+ (k+1)(k+2-k-1) = 1 \cdot (k+2) - 1^2 + 2 \cdot (k+2) - 2^2 + \dots + i(k+2) - i^2 + \dots + \\ &+ k(k+2) - k^2 + (k+1)(k+2) - (k+1)^2 = (1+2+\dots+i+\dots+k+k+1)(k+2) - \\ &-(1^2+2^2+\dots+i^2+\dots+k^2+(k+1)^2) = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)^2}{2} - \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(3k+6-2k-3)}{6} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6} \end{aligned}$$

Тогава, според индукционното предположение, броят на всички правоъгълници, които се съдържат в ъгъл с размер $k + 1$ е равен на

$$\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{24} + \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{24}$$

с което индукцията е завършена.