

Министерство на образованието,  
младежта и науката

60. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 12 март 2011 г.

Тема за 11. клас

**Задача 1.** Да се намерят всички стойности на реалния параметър  $a$ , за които уравнението

$$3^{\cos x} + 3^{1-\cos x} = a$$

има точно едно решение в интервала  $[0, \pi]$ .

**Задача 2.** Точките  $O$  и  $I$  са съответно център на описаната и вписаната окръжност за триъгълник  $ABC$ . Ъглополовящата на ъгъл  $ACB$  пресича описаната около триъгълника окръжност в точка  $D$ . Ако  $r$  е радиусът на вписаната окръжност,  $OI = r$  и  $ID = 2r$ , да се намери  $\sin \angle ACB$ .

**Задача 3.** Дадени са естествени числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$ . Да се докаже, че твърдението:

За всяко естествено число  $n$  произведението  $\binom{n}{a_1} \binom{n}{a_2} \dots \binom{n}{a_{2011}}$  се дели на  $n$ , е вярно тогава и само тогава, когато най-големия общ делител на числата  $a_1, a_2, \dots, a_{2011}$  е равен на 1.

*Време за работа: 4 часа и 30 минути.*