Министерство на образованието и науката

69. Национална олимпиада по математика

Втори ден, 30 юни 2020 г.
Решения на задачите за 9–12 клас

Задача 4. (Петър Бойваленков) Съществуват ли естествени числа $m \geq 5$ и n, за които:
а) $\binom{m}{3} = n^2$; б) $\binom{m}{4} = n^2 + 9$?

Решение.

а) Да, имаме $\binom{50}{3} = 140^2$.

б) Ще докажем, че не съществуват такива m и n. Да допуснем противното. Тогава

$$m(m-1)(m-2)(m-3) = 24(n^2+9).$$

Ако лявата страна се дели на 7, то $7|n^2+3^2$, което е невъзможно. Следователно отляво имаме произведение на четири последователни ненулеви остатъка по модул 7. Лесно се вижда, че това води само до две възможности –

$$24(n^2+9) \equiv 1.2.3.4 \equiv 3.4.5.6 \equiv 3 \pmod 7, \quad 24(n^2+9) \equiv 2.3.4.5 \equiv 1 \pmod 7.$$

Получаваме $n^2 \equiv 6 \pmod 7$ и $n^2 \equiv 3 \pmod 7$ съответно, като и двете са невъзможни, защото 6 и 3 не са квадратични остатъци по модул 7.

Оценяване (7 точки): 1 т. за а), 6 т. за б); 1 т. за разглеждане на модул 7, 3 т. за намиране на двата възможни остатъка на биномния коефициент, 2 т. за довършване.

Задача 5. (Стефан Герджиков) В равнината са дадени n точки, като някои от тях са свързани с отсечки. Някои от отсечките са оцветени в бяло, а други – в черно така, че има както изцяло бяла, така и изцяло черна затворена начупена линия от отсечки, които минават през всяка от дадените точки точно веднъж.

Знае се, че отсечките AB и BC са бели. Да се докаже, че отсечките могат да се преоцветят в червено и синьо така, че AB и BC да станат червени, не всички бели отсечки да станат червени и отново да има изцяло червена и изцяло синя затворена начупена линия от отсечки, които минават през всяка от дадените точки точно веднъж.
Забележка: Една отсечка не може да бъде едновременно оцветена в два цвята.

Решение. За мултиграф G с $H(G)$ означаваме множеството от всички $\{h_1, h_2\}$, където h_1 и h_2 са хамилтонови цикли в G без общи ребра. За ребра $x \neq y$ на G с $P_G(x,y)$ и $Q_G(x,y)$

означаваме множествата:

$$\begin{aligned} Q_G(x,y) &:= Q(x,y) &= \{\{h_1,h_2\} \in H(G) \,|\, x \in h_1 \iff y \in h_2\} \text{ и} \\ P_G(x,y) &:= P(x,y) &= \{\{h_1,h_2\} \in H(G) \,|\, x \in h_1 \iff y \in h_1\}. \end{aligned}$$

Ще докажем с индукция по броя на върховете $n \geq 3$ на G, че (*): *ако всеки връх на G е от степен 4, то $|P(x,y)|$ е четно за всеки две ребра $x \neq y$ на G.*

Да забележим, че това решава задачата. Наистина, ако G е графът с върхове дадените точки в равнината и ребра отсечките, които са оцветени в бяло и черно и участват в двете разноцветни начупени линии. Тогава по условие през всеки връх минават по две бели и две черни отсечки, тоест всеки връх е от степен 4. Нещо повече, без ограничение на общността може да предполагаме, че AB и BC са от графа и бели, иначе може да ги заменим с двете бели отсечки през A, които ще оцветим в червено. Тогава белите и черните отсечки дефинират два хамилтонови цикъла h_1 и h_2 без общи ребра, като AB и BC като и двете са в белия хамилтонов цикъл. Това показва, че $|P(AB,BC)| \geq 1$ и тъй като от (*) ще следва, че $|P(AB,BC)|$ е четно, то $|P(AB,BC)| \geq 2$. Тогава оцветявайки втората двойка от хамилтонови цикли $\{h'_1,h'_2\} \neq \{h_1,h_2\}$, където h'_1 минава през AB и BC, в червено и синьо съответно, получаваме желаното преоцветяване.

Сега ще докажем (*). При $n = 3$, ако ребрата на G изобщо може да се разделят на две, така че да образуват два хамилтонови цикъла, то тези цикли представляват триъгълници и тогава за всеки две различни ребра x и y или $|P(x,y)| = 2$, ако x и y не свързват едни и същи върхове, или $P(x,y) = \emptyset$, иначе.

Да допуснем, че за някое $n \geq 3$ и всеки мултиграф G, в който всеки връх е от степен 4, $|P(x,y)|$ е четно за всеки две различни ребра $x \neq y$. Първо да забележим, че тогава $|H(G)|$ е четно. Наистина, ако v е връх с ребра, които излизат от него x_1,x_2,x_3,x_4, то е ясно, че:

$$H(G) = P(x_1,x_2) \cup P(x_1,x_3) \cup P(x_1,x_4),$$

като никои две от трите множества вдясно нямат общи елементи. Следователно $|H(G)| = |P(x_1,x_2)| + |P(x_1,x_3)| + |P(x_1,x_4)|$ и тъй като и трите събираеми са четни, то и $H(G)$ е четно. Оттук, тъй като $|H(G)| = |P(x_1,x_2)| + |Q(x_1,x_2)|$, то $|Q(x_1,x_2)|$ също е четно.

Нека сега G' е произволен мултиграф с $n+1$ върха, в който всеки връх е от степен 4. Първо ще докажем, че $|P(x',y')|$ е четно, ако x' и y' имат общ връх. Нека този връх е v и $x' = \{v,u_1\}$, $y' = \{v,u_2\}$, $z' = \{v,u_3\}$ и $t' = \{v,u_4\}$ са четирите ребра, които излизат от v в G'. Да отбележим, че ако $u_i = v$ за някое $i = 1,2,3,4$, то няма два независими хамилтонови цикла в G' и следователно $H(G') = \emptyset$, откъдето $|P'_G(x',y')| = 0$. Поради това предполагаме, че $u_i \neq v$ за $i = 1,2,3,4$.

Разглеждаме графа G, който се получава от G' като премахнем върха v (и съответно ребрата x',y',z',t') и добавим ребрата $x = \{u_1,u_2\}$ и $y = \{u_3,u_4\}$, при което могат да възникнат мултиребра и/или примки. Лесно се вижда, че в G' всеки връх е от степен 4 и освен това на всяка двойка хамилтонови цикли $Q_G(x,y)$ взаимноеднозначно може да съпоставим двойка хамилтонови цикли от $P(x',y')$ (– заменяме x в G с x',y' в G' и y в G с

z', t' в G'). От индукционното предположение и разсъждението по-горе знаем, че $|Q_G(x,y)|$ е четно, следователно $|P_{G'}(x',y')|$ също е четно.

Знаейки, че $|P_{G'}(x',y')|$ е четно за съседни ребра, получаваме, че $|H(G')|$ е четно и съответно $|Q'_G(x',y')|$ е четно за всеки две съседни ребра. Нека сега x' и y' са произволни ребра в G'. Тъй като $|P_{G'}(x',y')| + |Q_{G'}(x',y')| = |H(G')|$ и $|H(G')|$ е четно, то достатъчно е да докажем, че $|Q_{G'}(x',y')|$ е четно. Нека $x' = \{u_0, u_1\}$ и $y' = \{v_0, v_1\}$ и да допуснем, че най-късият път от u_1 до v_0 е с дължина k (ако такъв няма, то $H(G') = \emptyset$ и всичко е наред). Нека $(u_1, u_2, \dots, u_k = v_0)$ е един такъв път. Тогава, ако $z' = \{u_1, u_2\}$, то:

$$Q(x',y') = P(x',z') \setminus P(z',y') \cup P(z',y') \setminus P(x',z').$$

Тогава $|Q(x',y')| \equiv |P(x',z')| + |P(z',y')| \pmod 2$. Вече знаем, че $|P(x',z')| \equiv 0 \pmod 2$, защото x' и z' имат общ връх. Освен това разстоянието от u_2 до $u_k = v_0$ е $k-1$. Следователно, индуктивно по k, може да предполагаме, че $|P(z',y')| \equiv 0 \pmod 2$. Следователно $|Q(x',y')| \equiv 0 \pmod 2$, откъдето и $|P(x',y')| \equiv 0 \pmod 2$, което завършва индукцията (както по k, така и по n).
Оценяване (7 точки): 1 т. – за това, че ако $|P(x,y)|$ е четно за всеки две ребра, то $|H(G)|$ и $|Q(x,y)|$ са четни; 3 т. – за индукционния преход при x и y съседни, от които 1 т. за конструкцията на G и 2 т. за доказателство, че $|Q_G(x,y)| = |P_{G'}(x',y')|$; 2 т. – за индукционния преход при x и y несъседни; 1 т. – за довършване.

Задача 6. (Александър Иванов) Нека $f(x)$ е неконстантен полином с реални коефициенти. Редицата $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ от реални числа е неограничена и:

$$a_i < a_{i+1} < a_i + 2020 \text{ за всяко } i \in \mathbb{N}.$$

Целите числа $\lfloor |f(a_1)| \rfloor, \lfloor |f(a_2)| \rfloor, \lfloor |f(a_3)| \rfloor, \dots$ са записани последователно, така че техните цифри образуват безкрайна редица от цифри $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, като $s_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$.

Да се докаже, че за всяко $n \in \mathbb{N}$, в множеството от числа $\overline{s_{n(k-1)+1}s_{n(k-1)+2}\cdots s_{nk}}$, $k \in \mathbb{N}$, се срещат всички n-цифрени числа.
Забележка: За реално число x, $\lfloor x \rfloor$ означава най-голямото цяло число, което не надминава x.

Решение. Без ограничение на общността може да предполагаме, че старшият коефициент на f е положителен. Тогава от дадено място нататък f е монотонно растяща функция и при това:

$$1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{f(x+2020)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor f(x) \rfloor + \{f(x)\}}{\lfloor f(x+2020) \rfloor + \{f(x+2020)\}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor f(x) \rfloor}{\lfloor f(x+2020) \rfloor}$$

Това показва, че за всяко естествено число M има число $B = B(M)$, за което, ако $x > B$, то $f(x) > 0$ и:

$$\frac{\lfloor f(x)\rfloor}{\lfloor f(x+2020)\rfloor} > \frac{M}{M+1}, \quad \text{което е еквивалентно на}$$

$$\frac{\lfloor f(x)\rfloor}{M} > \lfloor f(x+2020)\rfloor - \lfloor f(x)\rfloor \tag{1}$$

Нека сега фиксираме $M \in \mathbb{N}$ и да подберем p така, че за всяко $i \in \mathbb{N}$ ако $\lfloor f(a_i + 2020)\rfloor > M.10^p$, то $a_i > B = B(M)$ и $M.10^p > \lfloor f(a_1)\rfloor$. Това е възможно, защото редицата е неограничена отгоре и монотонна, а f клони към безкрайност, когато аргументът ѝ клони към безкрайност. Сега ще покажем, че има i, за което $\lfloor f(a_i)\rfloor = \lfloor |f(a_i)|\rfloor$ и чийто десетичен запис започва с M.

Тъй като $\lim_{k\to\infty} f(a_k) = \infty$ и $M.10^p > \lfloor f(a_1)\rfloor$, то има (най-малко) k, за което $\lfloor f(a_k)\rfloor \leq M.10^p < \lfloor f(a_{k+1})\rfloor$. От избора на p, знаем, че $a_{k+1} - 2020 > B$ и следователно $a_k > a_{k+1} - 2020 > B$. От избора на B, това показва, че $f(a_{k+1}) > f(a_k) > 0$, откъдето в частност $\lfloor |f(a_{k+1})|\rfloor = \lfloor f(a_{k+1})\rfloor$ и $\lfloor |f(a_k)|\rfloor = \lfloor f(a_k)\rfloor$. Нека сега $\lfloor f(a_{k+1})\rfloor = M.10^p + r$. Тогава, от свойствата на B, може да пресметнем:

$$10^p \geq \frac{\lfloor f(a_k)\rfloor}{M} \geq \lfloor f(a_{k+1})\rfloor - \lfloor f(a_k)\rfloor \geq r, \tag{2}$$

където първото неравенство следва от избота на k, а второто от (1). Следователно r се записва с не повече от p цифри и следователно десетичният запис на $\lfloor f(a_{k+1})\rfloor$ започва с числото M.

Нека сега $m \in \mathbb{N}$ е произволно n цифрено число. Полагаме $M = \overline{m1m1\dots1m}$ – n копия на числото m, разделени с $n-1$ единици . От горните разсъждения някое от числата $\lfloor |f(a_k)|\rfloor$ започва с M. Тогава за някоя позиция j имаме, че:

$$\overline{s_{j+1}s_{j+2}\dots s_{j+n^2+n-1}} = \overline{m1m1\dots1m}.$$

Остана да забележим, че различните копия на числото m в състава на M започват на различни позиции по модул n. Следователно някое от тях ще започне от позиция, даваща остатък 1 при деление на n в редицата s. Това завършва доказателството.

Оценяване (7 точки): 1 т. за (1); 4 т. за доказателство, че записът на всяко число $M > \lfloor f(a_1)\rfloor$ се среща в редицата s, от които – 1 т. за избор на p, 1 т. – за избор на k; 2 т. за доказателство на (2); 2 т. – за довършване, от които 1 т. за построяване на M от n-цифрено число m и 1 т. за доказателство, че m се среща на позиция, даваща остатък 1 при деление на n в s.