

Тема №2

Примерни решения

Задача 1. Да се реши уравнението $x|x-8| = -7$.

Решение. Понеже $|x-8| \geq 0$ и $-7 < 0$, уравнението няма положителни корени. За $x \leq 0$ имаме $x-8 < 0$ и уравнението е: $x(8-x) = -7$, с корени $4 \pm \sqrt{23}$, от които само $4 - \sqrt{23}$ е отрицателен. Отговор: $4 - \sqrt{23}$.

II-ро решение. При $x < 8$ уравнението е: $x(8-x) = -7$, с корени $4 \pm \sqrt{23}$, от които само $4 - \sqrt{23}$ е по-малък от 8. При $x \geq 8$ уравнението е: $x(x-8) = -7$, с корени 1 и 7. И двата корена не отговарят на разглеждания случай.

Задача 2. Три числа, със сума 18, са последователни членове на намаляваща аритметична прогресия. Ако добавим 5 към първото число, 6 към второто и 9 към третото, ще получим последователни членове на геометрична прогресия.

Да се намерят числата.

Решение. Нека a , b , и c са търсените числа. Тогава $a \geq b \geq c$, $a+b+c = 18$ и, от условието за аритметична прогресия, $a+c = 2b$, откъдето $b = 6$. Полагаме $t = a-6 = 6-c \geq 0$. Числата $t+11$, 12 и $15-t$ образуват геометрична прогресия, т.е. $(t+11)(15-t) = 144$, откъдето $t^2 - 4t - 21 = 0$. Неотрицателният корен на това уравнение е 7. Отговор: 13, 6, -1. (алтернативното полагане $u = 6-a = c-6 \leq 0$ води до уравнението $u^2 + 4u - 21 = 0$)

II-ро решение. Нека x , y , и z са търсените числа. Тогава те удовлетворяват равенствата

$$x+y+z = 18; \quad x+z = 2y; \quad (x+5)(z+9) = (y+6)^2$$

и неравенствата $x \geq y \geq z$. От първите две уравнения намираме $y = 6$ и достигаем до системата $x+z = 12$; $(x+5)(z+9) = 144$, която, след заместване $z = 12-x$, се свежда до $(x+5)(21-x) = 144$, с корени 3 и 13. $x = 3 < 6$ не е решение на задачата.

Задача 3. Да се реши неравенството:

$$\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} + \sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} \geq 0.$$

Решение. Извършваме последователно еквивалентни преобразувания:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} + \sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} \geq 0 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} \geq -\sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}}\right)^3 \geq \left(-\sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}}\right)^3 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-5} \geq -\frac{x+5}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-5} + \frac{x+5}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+\sqrt{13})(x-\sqrt{13})}{(x-5)(x-1)} \geq 0 \end{aligned}$$

Решенията на последното неравенство са $(-\infty, -\sqrt{13}] \cup (1, \sqrt{13}] \cup (5, +\infty)$.

II-ро решение. Допустимите стойности са: $x \neq 1, 5$. Решаваме уравнението:

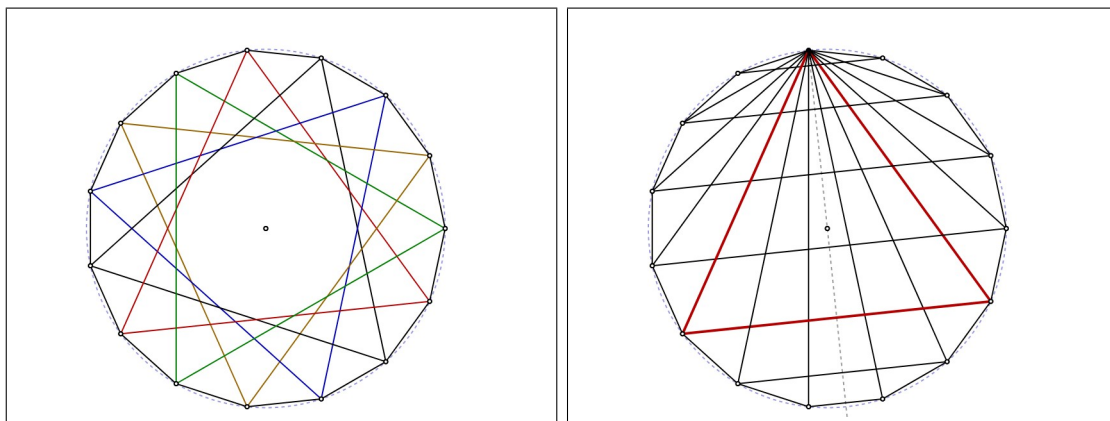
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} + \sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} = 0 &\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}} = -\sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-5}}\right)^3 = \left(-\sqrt[3]{\frac{x+5}{x-1}}\right)^3 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-5} = -\frac{x+5}{x-1} \Leftrightarrow x^2 - 1 = -(x^2 - 25) \Leftrightarrow x^2 = 13 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{13} \end{aligned}$$

Корените разделят множеството на допустимите стойности на интервалите $(-\infty, -\sqrt{13})$, $(-\sqrt{13}, 1)$, $(1, \sqrt{13})$, $(\sqrt{13}, 5)$ и $(5, +\infty)$. Първият, третият и петият се състоят от решения

на неравенството, а във втория и четвъртия няма решения, защото числата -6 , $1,001$ и 6 са решения, а 0 и $4,999$ не са решения. Окончателния отговор получаваме като добавим корените на уравнението.

Задача 4. Да се намери броят на равнобедрените триъгълници, чиито върхове са върхове на даден правилен петнадесетоъгълник.

Решение. Равностранните триъгълници са 5. Препрояваме равнобедрените триъгълници, които не са равностранни, с фиксиран връх срещу основата. Останалите два върха са симетрични спрямо диаметъра през фиксираната точка. Има 7 такива двойки, като от една от тях се получава равностранен триъгълник. Понеже върховете са 15, то търсеният брой е $15 \cdot 6 + 5 = 95$.



II-ро решение. Равнобедрените триъгълници с фиксиран връх срещу основата са 7, т.е. получаваме $15 \cdot 7 = 105$ триъгълника. При този начин на броене всеки равностранен триъгълник е броен три пъти (всеки връх е връх срещу основата). Търсеният брой е $105 - 2 \cdot 5 = 95$.

III-то решение. За всяка двойка върхове съществува точно един, така че трите точки (началната двойка — върхове при основата и съществуващата трета) образуват равнобедрен триъгълник. Възможните двойки са $\frac{15 \cdot 14}{2} = 105$. При този начин на броене всеки равностранен триъгълник е броен три пъти (всяка страна е „основа“). Търсеният брой е $105 - 2 \cdot 5 = 95$.

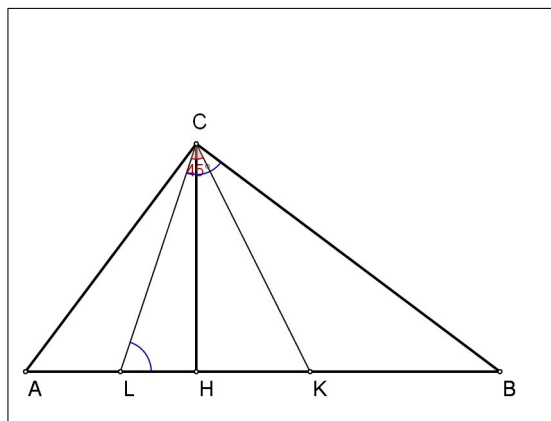
Задача 5. В правоъгълния $\triangle ABC$, с катети $AC = 8$ и $BC = 15$, CH ($H \in AB$) е височината към хипотенузата, CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на $\angle ACH$, а CK ($K \in AB$) — на $\angle BCH$. Да се намери радиусът на описаната около $\triangle LKC$ окръжност.

Решение. Имаме $\angle LCK = \angle LCH + \angle HCK = \frac{1}{2} \angle ACH + \frac{1}{2} \angle HCB = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$.

Триъгълниците KCB и LCA са равнобедрени. Наистина, $\angle BLC = \angle BAC + \angle ACL$ като външен, а $\angle LCB = \angle LCH + \angle HCB$. Понеже $\angle BAC = \angle HCB$ и $\angle ACL = \angle LCH$, то $\angle BLC = \angle LCB$. Аналогично, $\angle AKC = \angle ABC + \angle BCK = \angle ACH + \angle HCK = \angle ACK$. Следователно, $BL = BC$ и $AK = AC$, откъдето $AB + LK = AK + BL = AC + BC$. Понеже $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 17$, то $LK = AC + BC - AB = 6$. За търсения радиус имаме $R = \frac{LK}{2 \sin \angle LCK} = 3\sqrt{2}$.

Алтернативно пресмятане на LK . Имаме $AB = 17$, $AH = \frac{AC^2}{AB} = \frac{64}{17}$, $BH = \frac{BC^2}{AB} = \frac{225}{17}$, $CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{120}{17}$.

CL е ъглополовяща, значи $AL : HL = AC : HC = 17 : 15$. Полагаме $AL = 17x$ и $LH = 15x$. Тогава $AH = 32x$, т.е. $x = \frac{2}{17}$ и $LH = \frac{30}{17}$. Аналогично, $BK : HK = BC : HC = 17 : 8 = 17y : 8y$, откъдето $y = \frac{9}{17}$, $KH = \frac{72}{17}$, $LK = LH + KH = 6$.



Задача 6. Да се реши уравнението $\log_6(2 - 5 \cos x) - 1 = 2 \log_6 \sin x$.

Решение. Решенията на уравнението трябва да удовлетворяват условията $2 - 5 \cos x > 0$ и $\sin x > 0$. Преобразуваме уравнението

$$\log_6(2 - 5 \cos x) - 1 = 2 \log_6 \sin x \Rightarrow \log_6(2 - 5 \cos x) = \log_6 6 \sin^2 x \Rightarrow 2 - 5 \cos x = 6 \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 6 \cos^2 x - 5 \cos x - 4 = 0 \Leftrightarrow (3 \cos x - 4)(2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2},$$

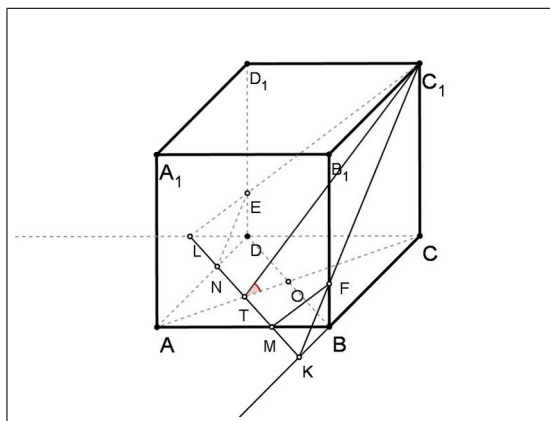
защото $3 \cos x - 4 \leq -1$. Корените на последното уравнение са $\pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ и всички те удовлетворяват условието $2 - 5 \cos x > 0$. Понеже $\sin\left(-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) < 0$ и $\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) > 0$, то решенията на изходното уравнение са $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ (k — цяло число).

Задача 7. Точките M и N са съответно от ръбовете AB и AD на куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, като $AM = AN$. Да се намери отношението на обемите на телата, на които равнината, минаваща през M, N и върха C_1 , разделя куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ако тангенсът на ъгъла между тази равнина и равнината $ABCD$ е равен на $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Решение. Нека $AB = a$. MN е пресечницата на равнините MNC_1 и $ABCD$. Понеже $AM = AN$, то $MN \parallel BD$, откъдето $MN \perp AC$. Нека $T = MN \times AC$.

От $C_1 C \perp ABCD$ и теоремата за трите перпендикуляра получаваме $C_1 T \perp MN$, т.е. условието е $\operatorname{tg} \angle CTC_1 = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. Следователно $CT = \frac{2\sqrt{2}a}{3}$ и $(O = BD \times AC) OT = \frac{\sqrt{2}a}{6}$, откъдето $OT : OA = 1 : 3$ и $MB = \frac{a}{3}$. Означаваме

$K = MN \times BC$, $L = MN \times CD$, $F = KC_1 \times BB_1$, $E = LC_1 \times DD_1$. Ще пресметнем обема V_1 на многостена с върхове M, B, C, N, E, F и C_1 като го допълним с пирамидите $MKFB$ и $LNED$ до пирамидата KC_1LC (и трите с взаимно перпендикулярни ръбове през един връх).



Имаме $LD = KB = BM = \frac{a}{3}$, $BF : CC_1 = BK : CK = 1 : 4$, т.е. $DE = BF = \frac{a}{4}$. За обемите намираме $V_{LNED} = V_{MKFB} = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^3}{216}$, $V_{KC_1LC} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4a}{3} \cdot \frac{4a}{3} \cdot a = \frac{8a^3}{27}$. Тогава $V_1 = V_{KC_1LC} - V_{MKFB} - V_{LNED} = \frac{31a^3}{108}$, а за обема на многостена с върхове $M, F, C_1, E, N, A, A_1, B_1$ и D_1 имаме $V_2 = a^3 - V_1 = \frac{77a^3}{108}$. Отговор: $V_1 : V_2 = 31 : 77$.

Задача 8. Страните на $\triangle ABC$ са $AB = 12$, $AC = BC = 11$, точката P е вътрешна за триъгълника, а K, M и N са петите на перпендикулярите от P съответно към страните AB, AC и BC . Да се намери сумата $BN + CM$, ако $AK = 5$.

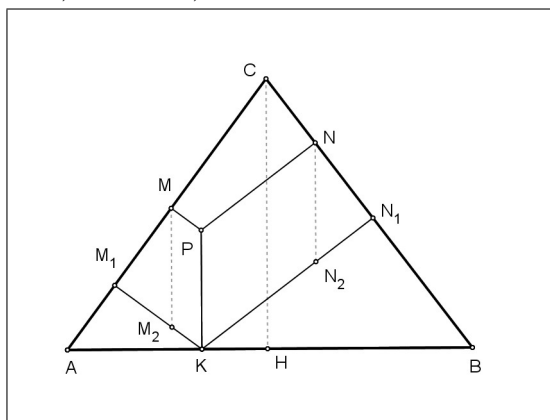
Решение. Нека H е средата на AB . Тогава $CH \perp AB$ и $\angle ACH = \angle BCH$. Означаваме $\alpha = \angle BAC = \angle ABC$. Имаме $\cos \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{6}{11}$.

I-во решение. Нека $KN_1 \perp BC$ ($N_1 \in BC$), $KM_1 \perp AC$ ($M_1 \in AC$), $N_1 N_2 \parallel CH$ ($N_2 \in KN_1$) и $M_1 M_2 \parallel CH$ ($M_2 \in KM_1$). Тогава $NN_2 = PK = MM_2$ и триъгълниците $NN_1 N_2$ и $MM_1 M_2$ са еднакви, откъдето $NN_1 = MM_1$. Следователно $BN + CM = BN_1 + CM_1$.

Имаме $BN_1 = BK \cdot \cos \alpha = \frac{42}{11}$,

$$CM_1 = AC - AM_1 = AC - AK \cdot \cos \alpha = \frac{91}{11}.$$

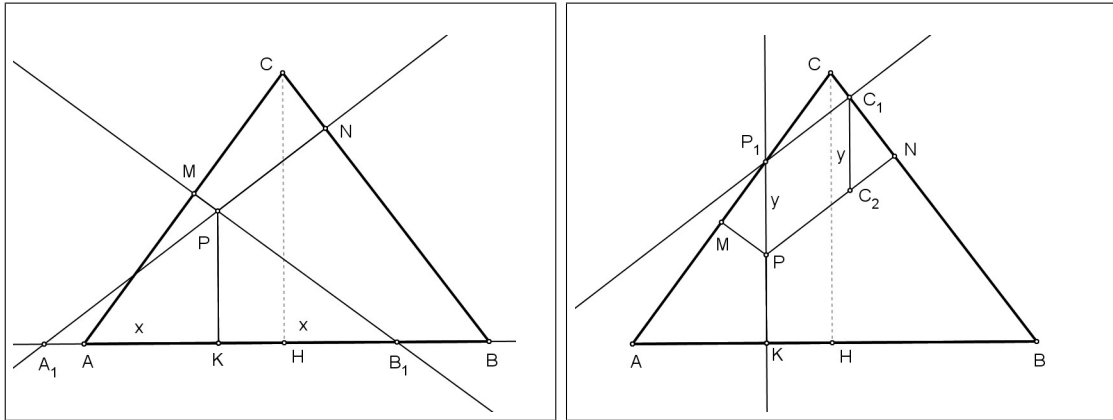
Отговор: $BN + CM = \frac{133}{11}$.



II-ро решение. Нека правата AB пресича правата PN в точката A_1 , а правата PM — в точката B_1 . Тогава $\sphericalangle NA_1B = \sphericalangle MB_1A$ и, следователно, $A_1K = KB_1 = x$. Имаме

$$BN + CM = BA_1 \cdot \cos \alpha + AC - AB_1 \cdot \cos \alpha = (BK + x) \cos \alpha + AC - (AK + x) \cos \alpha =$$

$$AC + (BK - AK) \cos \alpha = \frac{133}{11}.$$



III-то решение. Понеже $AK < AH$, правата KP пресича страната AC в точка P_1 . Нека $P_1C_1 \perp BC$ ($C_1 \in BC$) и $C_1C_2 \parallel CH$ ($C_2 \in PM$). Тогава $P_1P = C_1C_2$ и триъгълниците PMP_1 и C_2NC_1 са еднакви, откъдето $MP_1 = NC_1$. Следователно $BN + CM = BC_1 + CP_1$. Имаме $AP_1 = \frac{AK}{\cos \alpha} = \frac{55}{6}$, $CP_1 = CA - AP_1 = \frac{11}{6}$, $CC_1 = CP_1 \cdot \cos(\pi - 2\alpha) = CP_1 \cdot (1 - 2\cos^2 \alpha) = \frac{49}{66}$,

$$BN + CM = 11 - \frac{49}{66} + \frac{11}{6} = \frac{133}{11}.$$

Задача 9. Да се намери разликата между най-голямата и най-малката стойност на функцията:

$$4\sqrt{x(6-x)} - a \cdot 2\sqrt{x(6-x)} + 1.$$

За коя стойност на параметъра a тази разлика е най-малка?

Решение. Полагаме $u = 2\sqrt{x(6-x)}$. Имаме $x(6-x) \leq 9$ и $x(6-x) \geq 0$ за $0 \leq x \leq 6$. За тези стойности на x е изпълнено $0 \leq \sqrt{x(6-x)} \leq 3$ и $1 \leq u \leq 8$.

Задачата е да се намери разликата между най-голямата и най-малката стойност на функцията $f(u) = u^2 - 2au$ в интервала $[1, 8]$.

Най-голямата стойност на f се достига в онзи край на интервала $[1, 8]$, който е по-далече от a . Най-малката стойност на f се достига в a , когато $a \in [1, 8]$, и в по-близкия до a край, когато $a \notin [1, 8]$. Следователно, за търсената разлика имаме:

$$R(a) = \begin{cases} 16(4-a) - (1-2a) = 7(9-2a) & \text{за } a \leq 1 \\ 16(4-a) - (-a^2) = (a-8)^2 & \text{за } 1 \leq a \leq \frac{9}{2} \\ (1-2a) - (-a^2) = (a-1)^2 & \text{за } \frac{9}{2} \leq a \leq 8 \\ (1-2a) - 16(4-a) = 7(2a-9) & \text{за } 8 \leq a \end{cases}.$$

$R(a)$ е намаляваща в интервалите $(-\infty, 1]$ и $\left[1, \frac{9}{2}\right]$, и растяща в интервалите $\left[\frac{9}{2}, 8\right]$ и $[8, +\infty)$.

Следователно, най-малката ѝ стойност се достига за $a = \frac{9}{2}$.

Задача 10. Да се намери най-малкото цяло число k , за което уравнението $x^3 + kx + 2k + 15 = 0$ има поне един цял корен.

Решение. С полагане $y = x + 2$ получаваме уравнението $y^3 - 6y^2 + (k + 12)y + 7 = 0$. Целите му корени биха могли да бъдат $\pm 1, \pm 7$. При $y = 1$ имаме $k = -14$, при $y = -1$ имаме $k = -12$, при $y = 7$ имаме $k = -20$, при $y = -7$ имаме $k = -102$. Отговор -102 .

II-ро решение. Нека b е цял корен на даденото уравнение. Тогава $b \neq -2$ и $k = -(b^2 - 2b + 4) - \frac{7}{b+2}$. Стойностите на b , за които k е цяло число, са $5, -1, -3, -9$. Съответните стойности на k са $-20, -14, -12, -102$.

III-то решение. Нека a е цял корен на даденото уравнение. Тогава $a \neq 0$ и има цяло число b , за което $2k+15 = ab$. След заместване с $k = \frac{ab-15}{2}$ и опростяване получаваме $2a^2 + ab + 2b - 15 = 0$. Има цяло число c , за което $2b-15 = ac$, откъдето $4a + ac + 2c + 15 = 0$, т.е. $(a+2)(c+4) = -7$. Възможните стойности на a са $5, -1, -3, -9$, на c , съответно са $-5, -11, 3, -3$, откъдето стойностите на b са $-5, 13, 3, 21$, т.е. възможните стойности за k са $-20, -14, -12, -102$.