

Министерство на образованието и науката

---

# 70. Национална олимпиада по математика

## Областен кръг

13 февруари 2021 г.

### Условия, кратки решения и критерии за оценяване

**Задача 8.1.** В четириъгълника  $ABCD$  страната  $AD$  е равна на страната  $BC$ , а правите  $AD$  и  $BC$  се пресичат в точка  $E$ . Точките  $M$  и  $N$  са съответно среди на страните  $AB$  и  $CD$ . Да се докаже, че отсечката  $MN$  е успоредна на ъглополовящата на  $\angle AEB$ .

*Решение.* Нека точката  $P$  е среда на диагонала  $AC$  на четириъгълника  $ABCD$  и  $AD = BC = 2a$ . Тогава  $PN \parallel AD$  и  $PN = a$  (средна отсечка в  $\triangle ACD$ );  $PM \parallel BC$  и  $PM = a$  (средна отсечка в  $\triangle ABC$ ). Следователно  $MP = NP$  и  $\angle(AD; MN) = \angle(PN; MN) = \angle(PM; MN) = \angle(BC, MN)$ .

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за построяване на среда на диагонал; 1 т. за доказване, че  $MP = NP$ ; 1 т. за доказване на  $\angle(AD; MN) = \angle(PN; MN)$ ; 4 т. за завършване.

**Задача 8.2.** Ако  $A = \sqrt{25 + (\sqrt{8} - 8)\sqrt{7} - \sqrt{128}}$ ,  $B = \sqrt{99 - 70\sqrt{2}}$ ,  
 $C = \sqrt{127 - 48\sqrt{7}}$  и  $D = \sqrt{9 - \sqrt{56}}$ , то пресметнете  $4A - B + C - D$ .

*Решение.* Имаме  $A = \sqrt{7 + 2 + 16 + 2\sqrt{2 \cdot 7} - 8\sqrt{7} - 8\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{2} - 4)^2} = |\sqrt{7} + \sqrt{2} - 4| = \sqrt{7} + \sqrt{2} - 4$ ; тук използвахме, че  $\sqrt{7} + \sqrt{2} > 4 \iff 7 + 2 + 2\sqrt{14} > 16 \iff \sqrt{56} > 7 \iff 56 > 49$ .

$B = \sqrt{50 + 49 - 2 \cdot 7\sqrt{50}} = \sqrt{(\sqrt{50} - 7)^2} = |\sqrt{50} - 7| = 5\sqrt{2} - 7$ ; тук използвахме, че  $\sqrt{50} > 7 \iff 50 > 49$ .

$C = \sqrt{64 + 63 - 2 \cdot 8\sqrt{63}} = \sqrt{(8 - \sqrt{63})^2} = |8 - \sqrt{63}| = 8 - 3\sqrt{7}$ ; тук използвахме, че  $8 > \sqrt{63} \iff 64 > 63$ .

$D = \sqrt{7 + 2 - 2\sqrt{14}} = \sqrt{(\sqrt{7} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{7} - \sqrt{2}| = \sqrt{7} - \sqrt{2}$ .

$4A - B + C - D = 4\sqrt{7} + 4\sqrt{2} - 16 - 5\sqrt{2} + 7 + 8 - 3\sqrt{7} - \sqrt{7} + \sqrt{2} = -1$ .

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за  $A = \sqrt{7} + \sqrt{2} - 4$ , от които 1 т. за обосновка защо  $\sqrt{7} + \sqrt{2} \geq 4$ ; 1 т. за  $B = 5\sqrt{2} - 7$ ; 1 т. за  $C = 8 - 3\sqrt{7}$ ; 1 т. за  $D = \sqrt{7} - \sqrt{2}$ ; 1 т. за завършване.

**Задача 8.3.** Определете броя на всички редици от различни двуцифрени числа, такива че първото число в редицата е 10, последното има сбор от цифрите 7 и всяко ново число в редицата се получава от това пред него с едно от следните действия:

- 1) Една от цифрите е увеличена с 1, а другата не е променена;
- 2) Една от цифрите е увеличена с 1, а другата е намалена с 1.

*Решение.* Сред двуцифрените числа има 1 със сбор на цифрите 1, 2 – с 2, 3 – с 3, ..., 7 – със 7. Сборът от цифрите на числата в редицата не намалява. За всяко  $i = 2, 3, \dots, 7$  има 2 избора кое да е първото число със сбор от цифрите  $i$  (в зависимост от това при коя от цифрите е увеличението) и  $i$  избора кое да е последното (ако е същото, то в редицата има само едно число със сбор на цифрите  $i$ ), като между тях редицата е определена еднозначно. Отговор:  $2^6 \cdot 7! = 322560$ .

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за съображението, че има значение само първото и последното с даден сбор; 1 т. за това, че за първото има 2 избора; 1 т. за това, че за последното има  $i$  избора; 3 т. за завършване; 1 т. за правилен отговор (приема се и във вида  $2^6 \cdot 7!$ ).

**Задача 8.4.** За всяко естествено  $n$  означаваме

$$A_n = 6561^n - 6.729^n - 4.81^n + 2.3^{2n+3} - 45.$$

а) Кое е най-голямото естествено  $k$ , за което  $2^k$  дели  $A_n$  за всяко  $n$ ?

б) Докажете, че за всяко естествено  $k$  съществува  $n$ , такова че  $2^k$  дели  $A_n$ .

*Решение.* Ако  $x = 9^n$ , то  $A_n = x^4 - 6x^3 - 4x^2 + 54x - 45 = x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 9x^2 + 54x - 45 = x^2(x^2 - 6x + 5) - 9(x^2 - 6x + 5) = (x^2 - 9)(x - 5)(x - 1) = (81^n - 9)(9^n - 5)(9^n - 1)$ .

а) При деление на 16 остатъкът на  $81^n$  е 1, значи на  $81^n - 9$  е 8, т.е. то се дели на  $2^3$ , но не на  $2^4$ .

При деление на 8 остатъкът на  $9^n$  е 1, значи на  $9^n - 5$  е 4, т.е. то се дели на  $2^2$ , но не на  $2^3$ . Освен това  $9^n - 1$  се дели на  $2^3$  и при  $n = 1$  не се дели на  $2^4$ , така че  $A_n$  се дели на  $2^8$  и  $A_1$  не се дели на  $2^9$ , така че отговорът на а) е  $k = 8$ .

б) Ако числото 2 участва в  $\ell$ -та степен в каноничното разлагане на  $9^n - 1$ , то в каноничното разлагане на  $9^{2n} - 1 = (9^n - 1)(9^n + 1)$  то участва в  $\ell + 1$ -ва степен, понеже вторият множител дава остатък 2 при деление на 4. Като отчетем, че 2 участва в 3-та степен в каноничното разлагане на  $9^{2^0} - 1$ , заключаваме, че то участва в степен  $3 + m$  в разлагането на  $9^{2^m} - 1$ . Следователно множителят 2 в разлагането на  $A_{2^m}$  е от степен  $3 + 2 + 3 + m$ , което може да става произволно голямо.

**Оценяване.** (7 точки) а) 4 т., от които: 1 т. за разлагането и по 1 т. за определяне на степента на 2 във всеки от трите множителя;

б) 3 т. за всяка работеща конструкция.

**Задача 9.1.** Дадени са квадратните уравнения

$$ax^2 - x - 1 = 0, \quad bx^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{и} \quad abx^2 + (a^3 - b)x + b - a = 0.$$

Да се намерят всички възможни стойности на реалните параметри  $a$  и  $b$ , за които всеки две от уравненията имат общ реален корен, но трите уравнения нямат общ реален корен.

*Решение.* Първо, тъй като всяко уравнение участва в две различни двойки с различни общи реални корени (поради липсата на общ корен и за трите уравнения), то всяко от трите квадратни уравнения има по два различни реални корена. В частност,  $a, b \neq 0$ . Нека означим корените на първото уравнение с  $x_1$  и  $x_2$ , а на второто с  $x_2$  и  $x_3$ . Тогава, съгласно условието, корените на третото уравнение са  $x_3$  и  $x_1$ . Можем лесно да изразим  $x_2$  като функция на  $a$  и  $b$  от разликата на двете уравнения. Наистина, имаме  $ax_2^2 - x_2 - 1 = 0$  и  $bx_2^2 - 2x_2 - 1 = 0$ , следователно  $(b - a)x_2^2 = x_2$ . Но  $x_2 = 0$  не може да е корен на никое от първите две уравнения (стойността на квадратните тричлени в нулата е  $-1$ ) и значи  $x_2 = \frac{1}{b - a}$ , като  $b \neq a$ . От формулите на Виет, имаме че

$$x_1x_2 = -\frac{1}{a}, \quad \implies \quad x_1 = \frac{a - b}{a}; \quad x_2x_3 = -\frac{1}{b}, \quad \implies \quad x_3 = \frac{a - b}{b}.$$

Сега от формулите на Виет за третото уравнение имаме

$$\frac{b-a}{ab} = x_1 x_3 = \frac{(a-b)^2}{ab}, \implies (b-a-1)(b-a) = 0, \implies b-a = 1,$$

защото вече споменахме, че  $b \neq a$ . Оттук,  $x_2 = 1$  и значи  $0 = ax_2^2 - x_2 - 1 = a - 2$ , т.е.,  $a = 2$  и  $b = a + 1 = 3$ . Директна проверка показва, че при тези стойности на параметрите първото уравнение има корени  $\{-1/2, 1\}$ , второто уравнение има корени  $\{1, -1/3\}$ , а третото уравнение има корени  $\{-1/2, -1/3\}$ . Окончателно, единствено  $a = 2$  и  $b = 3$  са решение на задачата.

**Оценяване.** (7 точки) По 1 т. за изразяване на всеки от трите корена чрез  $a$  и  $b$ ; 2 т. за доказване на  $b - a = 1$ ; 1 т. за намиране на решението  $a = 2$ ,  $b = 3$ ; 1 т. за проверка, че този избор за параметрите наистина води до решение.

**Задача 9.2.** Вписаната окръжност в триъгълник  $ABC$  се допира до страните  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  съответно в точките  $M$ ,  $N$  и  $P$ . Точка  $K$  от страната  $BC$  е такава, че  $MN$  е ъглополовяща на  $\angle CMK$ , а точка  $Q$  е такава, че  $K$  е среда на  $MQ$ . Да се докаже, че  $\angle KNQ = \angle PNM$ .

*Решение.* Нека  $L$  е среда на  $PN$ . Тъй като точка  $C$  се явява пресечната точка на допирателните през върховете  $N$  и  $P$  към описаната около триъгълник  $NPM$  окръжност, то  $MC$  е симедиана за  $\triangle PMN$ . Следователно,  $\angle PML = \angle CMN = \angle NMK$ . Но,  $\angle LPM = \angle MNK$ , като половинки от дъгата  $NM$  и значи

$$\triangle PLM \sim \triangle NKM \implies \frac{PL}{LM} = \frac{NK}{MK} \implies \frac{NL}{LM} = \frac{NK}{QK}.$$

Също така

$$\angle MLN = 180^\circ - \angle MLP = 180^\circ - \angle MKN = \angle QKN.$$

Заклучаваме, че  $\triangle KNQ \sim \triangle LNM$ , от където  $\angle KNQ = \angle PNM$ .

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за построяване на точка  $L$ ; 1 т. за  $MC$  – симедиана в  $\triangle PMN$ ; 2 т. за  $\triangle PLM \sim \triangle NKM$ ; 2 т. за  $\triangle KNQ \sim \triangle LNM$  и 1 т. за довършване.

**Задача 9.3.** Да се намери най-малкото естествено число  $n \geq 2$ , за което съществуват  $n$  естествени числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , такива че сумата от квадратите им да е точен квадрат на естествено число, а произведението им да е точна  $n$ -та степен на естествено число.

*Решение.* Отговор  $n = 3$ . При  $n = 2$  искаме да решим системата:  $a_1^2 + a_2^2 = m^2$  и  $a_1 a_2 = k^2$ . Директно се вижда, че ако  $\{a_1, a_2\}$  е решение на задачата и  $(a_1, a_2) = d > 1$ , то и двойката  $\left\{\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}\right\}$  също е решение. Следователно, б.о.о., можем да приемем, че числата  $a_1$  и  $a_2$  са взаимно прости. Тогава  $a_1 = b_1^2$  и  $a_2 = b_2^2$  за някои естествени числа  $b_1, b_2$  и търсим решение на уравнението  $b_1^4 + b_2^4 = m^2$ .

**Лема:** Уравнението  $x^4 + y^4 = z^2$  няма решение в естествени числа!

Да допуснем противното и да разгледаме решението  $x_0, y_0, z_0$ , при което  $z_0$  е най-малко. Ясно е, че  $(x_0, y_0, z_0) = 1$ . Ще конструираме решение с по-малко  $z$ , което ще доведе до

противоречие. Числата  $x_0^2, y_0^2$  и  $z_0$  образуват питагорова тройка. Следователно съществуват естествени числа  $u$  и  $v$ , за които

$$x_0^2 = 2uv, \quad y_0^2 = u^2 - v^2, \quad z_0 = u^2 + v^2.$$

От  $(x_0, y_0) = 1$ , следва че  $v$  е четно, а  $u$  – нечетно (в противен случай  $y_0^2 \equiv -1 \pmod{4}$ , което е невъзможно). От  $x_0^2 = 2uv$  следва, че  $v = 2a^2$  и  $u = b^2$  за някои естествени числа  $a$  и  $b$ . От равенството

$$y_0^2 + v^2 = (u^2 - v^2) + v^2 = u^2$$

следва, че  $y_0, v$  и  $u$  също образуват питагорова тройка. Тогава съществуват взаимно прости естествени числа  $p$  и  $q$ , за които

$$y_0 = p^2 - q^2, \quad v = 2pq, \quad u = p^2 + q^2.$$

Следователно  $a^2 = pq$  и  $p = s^2, q = t^2$ . В крайна сметка, получаваме

$$b^2 = u = p^2 + q^2 = s^4 + t^4, \quad b \leq b^2 = u < u^2 + v^2 = z_0.$$

Противоречие.

Следователно  $n = 2$  не е възможно. При  $n = 3$ , директна проверка показва, че  $\{a_1, a_2, a_3\} = \{4, 9, 48\}$  удовлетворява условието на задачата, защото  $4^2 + 9^2 + 48^2 = 49^2$  и  $4 \cdot 9 \cdot 48 = 12^3$ .

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за свеждане на случая  $n = 2$  до  $x^4 + y^4 = z^2$ ; 1 т. за формулиране на лемата; 2 т. за доказателство на лемата; 3 т. за конструиране на пример при  $n = 3$ .

**Задача 9.4.** Върху квадратна дъска  $2021 \times 2021$  са разположени топове, така че:

- 1) Всяко поле на дъската се атакува от поне един топ.
- 2) Всеки топ атакува най-много 18 други топа.

Да се намери най-малката стойност на  $k$ , за която гарантирано можем да твърдим, че всеки квадрат  $k \times k$  от дъската съдържа поне един топ.

(Топ атакува всички полета от хоризонтала и вертикала в които се намира, както и топовете, разположени в тези полета.)

*Решение. Отговор:*  $k = 1920$ . Нека номерираме редовете и стълбовете на дъската от 1 до 2021 и да започнем да поставяме по 19 съседни топа на редове  $1, 2, \dots, 106$ , като във всеки стълб да имаме най-много един топ (т.е., на  $i$ -тия ред поставяме топовете в стълбовете  $19(i-1)+1, 19(i-1)+2, \dots, 19i$ ). На 107-мия ред поставяме седем топа в последните седем стълба. Очевидно такова разположение на топовете удовлетворява и двете изисквания в условието. Сега, нека пресметнем страната  $\ell$  на най-големия празен квадрат от дъската, с връх  $(2021, 2021)$ . Лесно се съобразява, че това е най-голямото число удовлетворяващо неравенството

$$(2021 - \ell) \cdot 19 \geq \ell \implies \ell \leq \frac{2021 \cdot 19}{20} < 1920.$$

Следователно, конструирахме позволено разположение на топовете върху шахматна дъска, така че да остане празен квадрат с размери  $1919 \times 1919$ , т.е.,  $k \geq 1920$ .

Нека сега допуснем, че при позволено разположение на топовете съществува празен квадрат  $1920 \times 1920$ . След пренареждане на редовете и стълбовете на дъската, б.о.о., този квадрат отново е с връх  $(2021, 2021)$ . Тъй като  $2021 - 1920 = 101$  и във всеки от първите 101 реда имаме не повече от 19 топа, а  $19 \cdot 101 = 1919 < 1920$ , получаваме че в поне един от стълбовете на дъската, съдържащи големия празен квадрат, не е разположен топ. Аналогично имаме, че в поне един от редовете на дъската, съдържащи големия празен квадрат, не е разположен топ. Следователно, пресечното поле на този стълб и този ред не е атакувано от нито един от топовете – противоречие. Оттук и всеки квадрат  $1920 \times 1920$  съдържа в себе си поне по един топ.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за пример, че  $k \geq 1920$ ; 3 т. за оценка, че  $k \leq 1920$ ; 1 т. за довършване.

**Задача 10.1.** Дадена е системата

$$\begin{cases} xy + y - x = ax + 8 \\ z^2 - x^2y - xy = 3 \end{cases},$$

където  $a$  е реален параметър. Да се намерят всички стойности на  $a$ , за които системата има единствено решение.

*Решение.* Ако  $(x_0, y_0, z_0)$  е решение на системата, то  $(x_0, y_0, -z_0)$  също е решение. Следователно  $z = 0$  и тогава:

$$\begin{cases} xy + y - x = ax + 8 \\ x^2y + xy = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} y(x+1) = x(a+1) + 8 \\ xy(x+1) = -3 \end{cases}$$

Тъй като  $x \neq 0, -1$ , то  $y(x+1) = -\frac{3}{x}$  и след заместване в първото уравнение намираме:  $(a+1)x^2 + 8x + 3 = 0$ . Искаме това уравнение да има единствено решение.

Първи случай.  $a = -1$  тогава  $x = \frac{3}{8}$ ,  $y = \frac{64}{5}$ .

Втори случай.  $a \neq -1$  тогава от  $D = 0$  получаваме  $a = \frac{13}{3}$ , откъдето  $x = -\frac{3}{4}$  и  $y = 16$ .

Трети случай.  $a \neq -1$  и  $D > 0$ , като единият корен е  $x_1 = -1$ , тогава  $a = 4$ ,  $x_2 = -\frac{3}{5}$  и  $y = \frac{25}{2}$ .

Отговор:

При  $a = -1$  решението е  $(3/8; 64/5; 0)$ ; при  $a = \frac{13}{3}$  решението е  $(-3/4; 16; 0)$  и при  $a = 4$  решението е  $(-3/5; 25/2; 0)$ .

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за  $z = 0$ ; 2 т. за достигане до уравнението  $(a+1)x^2 + 8x + 3 = 0$ ; по 1 т. за първи и втори случай; 2 т. за трети случай.

**Задача 10.2.** За триъгълник  $ABC$  външновписаната окръжност  $k$  с център  $O$  и радиус  $r$  към страната  $AB$  се допира до  $AB$  в точка  $D$  и до продълженията на страните  $AC$  и  $BC$  съответно в точки  $P$  и  $Q$ . Нека  $CO$  пресича  $AB$  в точка  $L$ . Ако  $CD = r$ , да се докаже, че  $QP$  разполовява  $OL$ .

*Решение.* Нека  $PQ$  пресича  $OL$  в точка  $T$ . От  $\triangle QOC$  - правоъгълен следва  $QO^2 = OT \cdot OC(1)$ . Нека  $DM$  е перпендикуляр от  $D$  към  $CO$ . От  $\triangle DLO$  правоъгълен следва  $DO^2 = OM \cdot OL(2)$ .

От (1) и (2) получаваме  $OT.OC = OM.OL$ . От  $CD = OD$  следва  $OC = 2.OM$ , т.е.  $2.OT = OL$ , с което твърдението е доказано.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за  $QO^2 = OT.OC$ ; 1 т. за построението на перпендикуляра  $DM$ , 1 т. за  $DO^2 = OM.OL$ ; 2 т. за  $OT.OC = OM.OL$ ; 2 т. за довършване.

**Задача 10.3.** Да се намерят всички естествени числа  $n$ , за които числото

$$N = 2 + \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$$

е точен квадрат на естествено число.

*Решение.* С ММИ установяваме, че  $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ . Търсим  $n$ , за които  $N = 4 + (n-1) \cdot 2^{n+1} = t^2$ , където  $t$  е естествено число. При  $n > 5$  имаме  $t = 2 \cdot k$  откъдето  $1 + (n-1) \cdot 2^{n-1} = k^2 = (2 \cdot s + 1)^2$  и  $(n-1) \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot s(2 \cdot s + 2)$ , т.е.  $(n-1) \cdot 2^{n-3} = s \cdot (s+1)$ . Тъй като  $s$  и  $s+1$  са 2 последователни числа и  $2^{n-3} > n$  за  $n > 5$  (ММИ) следователно  $2^{n-3} - (n-1) > 1$  и възможните решения са за  $n = 1, 2, 3, 4, 5$ . С директна проверка се установява, че търсените  $n$  са  $n = 1$  и  $N = 4$ ,  $n = 3$  и  $N = 36$ ,  $n = 4$  и  $N = 100$ .

**Оценяване.** (7 точки) 3 т.  $\sum_{k=1}^n k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ ; 1 т. за представянето на  $(n-1) \cdot 2^{n-3} = s \cdot (s+1)$ ; 2 т. за оценката  $2^{n-3} - (n-1) > 1$  при  $n > 5$ ; 1 т. за отговор.

**Задача 10.4.** Върху квадратна дъска  $2021 \times 2021$  са разположени топове, така че:

- 1) Всяко поле на дъската се атакува от поне един топ.
- 2) Всеки топ атакува най-много 18 други топа.

Да се намери най-малката стойност на  $k$ , за която гарантирано можем да твърдим, че всеки квадрат  $k \times k$  от дъската съдържа поне един топ.

(Топ атакува всички полета от хоризонтала и вертикала в които се намира, както и топовете, разположени в тези полета.)

*Решение.* Виж задача 9.4.

**Оценяване.** (7 точки) 3 т. за пример, че  $k \geq 1920$ ; 3 т. за оценка, че  $k \leq 1920$ ; 1 т. за довършване.

**Задача 11.1.** Да се намерят всички стойности на реалния параметър  $a$ , за които уравнението

$$4^x + a \cdot 2^{x+2} = 2^{x-1} + 2a$$

има точно едно решение.

*Решение.* Полагаме  $y = 2^{x-1} > 0$  и записваме уравнението във вида:

$$f(y) = 4y^2 + (8a - 1)y - 2a = 0.$$

Търсим стойностите на  $a$ , за които това уравнение има единствен положителен корен. Тъй като старшият коефициент е положителен, ако уравнението има два корена те трябва да са с различни знаци. Тогава  $f(0) < 0 \iff a > 0$ .

Ако уравнението има само един положителен корен, то  $D = (8a + 1)^2 = 0 \iff a = -\frac{1}{8}$ , като тогава коренът е  $y = \frac{1}{4} > 0$ .

Търсените стойности са  $a = -\frac{1}{8}$  и  $a > 0$ .

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за полагане  $y = 4^{x-1}$  или подобно; 1 т. за записване на уравнението като функция на  $y$ ; 3 т. за разглеждане на случая с два корена; 2 т. за случая с един корен.

**Задача 11.2.** Даден е триъгълник  $ABC$ , за който  $\angle ACB = 60^\circ$ . Точките  $P$  и  $Q$  върху страните  $BC$  и  $AC$  са такива, че четириъгълникът  $ABPQ$  е вписан в окръжност с радиус  $r$  и разстоянието от върха  $C$  до допирната точка на вписаната окръжност в  $\triangle ABC$  със страната  $BC$  е равно на  $BP + AQ - PQ$ . Да се намери отношението  $\frac{AB}{r}$ .

*Решение.* Ще използваме стандартни означения за елементите на  $\triangle ABC$ .

Тъй като  $ABPQ$  е вписан в окръжност имаме  $\triangle ABC \sim \triangle PQC$ . Тогава  $CP = kb$ ,  $CQ = ka$  и  $PQ = kc$ , където  $k$  е коефициентът на подобие на двата триъгълника.

От  $BP + AQ - PQ = \frac{a+b-c}{2}$  получаваме:

$$a - kb + b - ka - kc = \frac{a+b-c}{2} \iff (a+b+c)(2k-1) = 0.$$

Това означава, че  $k = \frac{1}{2}$  и от косинусовата теорема за  $\triangle APC$  получаваме:

$$AP^2 = AC^2 + CP^2 - AP \cdot AC = 3CP^2 \Rightarrow AP = CP\sqrt{3}.$$

За  $\triangle APC$  е изпълнена Питагоровата теорема, т.е.  $\angle APC = 90^\circ$ . Следователно  $R = \frac{c}{2}$  и търсеното отношение е равно на 2.

*Оценяване.* 3 т. за намиране на  $k$ ; 3 т. за намиране на  $\angle APC = 90^\circ$ ; 1 т. за получаване на отговора.

**Задача 11.3.** За всяко естествено число  $n$  с  $f(n)$  означаваме сборът от всички естествени числа, които са по-малки от  $n$  и не са прости. Например  $f(5) = 1 + 4 = 5$  и  $f(10) = 1 + 4 + 6 + 8 + 9 = 28$ . Да се намерят всички естествени числа, за които  $f(n) - 1 = \frac{n^2}{4}$ .

*Решение.* От равенството  $f(n) - 1 = \frac{n^2}{4}$  следва, че  $\frac{n^2}{4}$  е естествено число, т.е.  $n$  е четно число. С директна проверка се установява, че при  $n \leq 14$  единственото решение е  $n = 14$ , като тогава  $f(14) = 1 + 4 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 = 50$  и  $\frac{14^2}{4} = 49$ .

Нека  $g(n) = \frac{n^2}{4}$ . При  $n = 16$  имаме  $f(16) = 79$  и  $g(16) = 64$ , като  $f(16) - g(16) = 15$ .

Нека  $n \geq 16$  и да разгледаме функцията  $f(n)$ , когато  $n$  е четно число. Ако  $n + 1$  е просто число, имаме  $f(n+2) = f(n) + n$ . Ако  $n + 1$  не е просто число, имаме  $f(n+2) = f(n) + 2n + 1$ .

За функцията  $g(n) = \frac{n^2}{4}$  имаме  $g(n+2) = g(n) + n + 1$ .

Тъй като едно от числата  $n + 1$ ,  $n + 3$  и  $n + 5$  се дели на 3, от горното следва, че ако  $f(n) - g(n) > 10$ , то  $f(n+2) - g(n+2) > 9$ ,  $f(n+4) - g(n+4) > 8$  и  $f(n+6) - g(n+6) > 10$ . Следователно  $f(n) - g(n) > 10$  за всяко  $n \geq 16$ .

Единственото число с исканото свойство е  $n = 14$ .

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за намиране, че  $n = 14$  е решение; 1 т. за твърдение, че това решение е единствено; 5 т. за доказване, че  $f(n) - g(n) > 1$  за всяко  $n \geq 16$ .

**Задача 11.4.** Разглеждаме таблица  $3 \times 3$  във всяка клетка на която е записан един от символите  $a$  и  $b$ . За един ход се избира някоя клетка и във всички клетки, имащи обща страна с избраната,  $a$  се сменя с  $b$ , а  $b$  се сменя с  $a$ . Колко различни таблици могат да се получат по този начин?

Две таблици са различни, ако записаните символи в две съответни клетки на таблиците са различни.

*Решение.* Тъй като последователността на ходовете не е от значение и повтарянето на ход не води до промяна на записаните числа, за всяка клетка се интересуваме дали с тази клетка е направен ход или не. Във всяка клетка на таблицата ще пишем 0, ако с тази клетка не е направен ход и 1, ако е направен.

Първо ще намерим всички таблици с 0 и 1, които не водят до промяна на началното състояние на дадената таблица. Това означава, че търсим таблици в които всяка клетка има четен брой съседни клетки, в които е записана единица.

Тъй като в двете съседни на ъглова клетка трябва да има четен брой единици, то в тези две клетки или има нули, или има единици. От това свойство за четирите ъглови клетки следва, че в четирите средни по страните клетки има или само нули или само единици.

Нека в тези 4 клетки има нули. Ако в средната клетка също има нула, то в ъгловите клетки или има само нули или само единици и получаваме таблиците:

0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1

Ако в средната клетка има единица, то поне в една от ъгловите клетки има единици и с изчерпване на възможностите получаваме следните две таблици:

1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0

Нека в четирите средни клетки има единици. Ако в средната клетка има нула, получаваме

таблиците:

1	1	1
1	0	1
1	1	1

1	0	1
0	0	0
1	0	1

Ако в средната клетка има единица, получаваме таблиците:

0	1	1
1	1	1
1	1	0

1	1	0
1	1	1
0	1	1

Общо получихме 8 таблици с нули и единици, които не променят състоянието на началната таблица. Всички възможни таблици от нули и единици са  $2^9$ . Ако сборът на две такива таблици  $A$  и  $B$  (сборът на двете таблици е таблица, във всяка клетка на която е записан сборът от числата в съответните клетки на  $A$  и  $B$  по модул 2) е някоя от горните 8 таблици, то  $A$  и  $B$  водят до една и съща крайна таблица с  $a$  и  $b$ .

Следователно броят на различните таблици с  $a$  и  $b$  е равен на:  $\frac{2^9}{8} = 64$ .

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за наблюдението, че има значение само четността на ходовете във всяка клетка; 1 т. за разглеждане на таблици от 0 и 1, които не променят началната таблица с  $a$  или  $b$ ; 4 т. за намиране на 8-те таблици с 0 и 1; 1 т. за получаване на отговора;

**Задача 12.1.** Нека  $a_1 > 0, a_2 = (a_1)^{\frac{1}{a_1}}, a_3 = (a_2)^{\frac{1}{a_2}}, \dots$ . Да се докаже, че тази редица е сходяща и да се намери нейната граница (в зависимост от  $a_1$ ).

*Решение.* Понеже (1)  $0 < a_{n+1} = (a_n)^{\frac{1}{a_n}} \leq a_n$ , то редицата е намаляваща и ограничена, и значи е сходяща. За нейната граница  $l$  имаме, че  $l \leq a_1$ . Ако  $l \neq 0$ , от (1) получаваме, че  $l = l^{\frac{1}{l}}$ , т.е.  $l = 1$ . Следователно  $l = 0$  при  $a_1 < 1$ . От друга страна, от (1) по индукция следва, че ако  $a_1 \geq 1$ , то  $a_n \geq 1$ ; в частност,  $l \geq 1$ , откъдето  $l = 1$ .

**Оценяване.** (7 точки) 2 т. за сходимост, 1 т. за  $l \in \{0, 1\}$ , и по 2 т. за случаите  $a_1 < 1$  и  $a_1 \geq 1$ .

**Задача 12.2.** Сфера се допира до всички ръбове на  $n$ -ъгълна пресечена пирамида. Да се докаже, че пирамидата е правилна.

*Решение.* Нека пирамидата има основи  $A_1 \dots A_n$  и  $B_1 \dots B_n$ . Те са описани около окръжности с центрове проекциите  $I_a$  и  $I_b$  на центъра  $I$  на дадената сфера върху тях. Хомотетия с център  $M$  и коефициент  $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} > 1$  изпраща  $I_b$  в  $I_a$ . Следователно (1) точките  $M, I_b, I_a, I$  лежат на една права, перпендикулярна на основите. Ако  $C_1$  и  $C_2$  са допирните точки на сферата с ръбовете  $A_1M$  и  $A_2M$ , то  $\triangle IMC_1 \cong \triangle IMC_2$ . Тогава  $\angle I_aMA_1 = \angle I_aMA_2$ , т.е. (2)  $MA_1 = MA_2 =: a$ . Понеже сферата се допира до ръба  $A_1A_2$ , то (3)  $A_1A_2 = 2(a - c)$ , където  $c := MC_1 = MC_2$ . От (2) и (3) следва, че  $MA_i = a$  и  $A_iA_{i+1} = 2(a - c)$ . Значи пирамидата е правилна.

**Оценяване.** (7 точки) По 2 т. за (1), (2), (3) и 1 т. за извод.

**Задача 12.3.** За всяко естествено число  $n$  с  $f(n)$  означаваме сборът от всички естествени числа, които са по-малки от  $n$  и не са прости. Например  $f(5) = 1 + 4 = 5$  и  $f(10) = 1 + 4 + 6 + 8 + 9 = 28$ . Да се намерят всички естествени числа, за които  $f(n) - 1 = \frac{n^2}{4}$ .

*Решение.* Виж задача 11.3.

**Оценяване.** (7 точки) 1 т. за отхвърляне на  $n < 14$ ; 1 т. за отговор  $n = 14$ ; 5 т. за доказване, че  $f(n) - 1 > \frac{n^2}{4}$  за всяко  $n > 14$ .

**Задача 12.4.** Да се докаже, че за всяко цяло число  $n \geq 3$  съществуват безброй много нечетни точни квадрати с точно  $\frac{n^2+n+2}{2}$  единици в двоичния си запис.

*Решение.* Нека  $a_1 = k \geq 4$ ,  $a_2 = k + 1$ ,  $a_3 = k + 2$ ,  $a_4 = 2k + 4$  и  $a_{n+1} = 2a_n - 1$  при  $n \geq 4$ . Полагаме  $A_n = 1 + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_n}$ . Тогава

$$A_3^2 = 1 + 2^{k+1} + 2^{k+2} + 2^{k+3} + 2^{2k} + 2^{2k+4} + 2^{2k+5},$$

$$A_4^2 = 1 + 2^{k+1} + 2^{k+2} + 2^{k+3} + 2^{2k} + 2^{2k+4} + 2^{2k+6} + 2^{3k+5} + 2^{3k+6} + 2^{3k+7} + 2^{4k+8}.$$

Да допуснем, че  $n \geq 4$  и числото  $A_n^2$  има точно  $\frac{n^2+n+2}{2}$  единици в двоичния си запис. Тогава

$$\begin{aligned} A_{n+1}^2 &= (A_n + 2^{2a_n-1})^2 = A_n^2 + 2^{2a_n} A_n + 2^{4a_n-2} = \\ &= (1 + \dots + 2^{a_n+a_{n-1}+1} + 2^{2a_n}) + 2^{2a_n} (1 + 2^{a_1} + \dots + 2^{a_n}) + 2^{4a_n-2} = \\ &= 1 + \dots + 2^{a_n+a_{n-1}+1} + 2^{2a_n+1} + 2^{2a_n+a_1} + \dots + 2^{3a_n} + 2^{4a_n-2}. \end{aligned}$$

Следователно броят на единиците в двоичния запис на  $A_{n+1}^2$  е равен на

$$\frac{n^2 + n + 2}{2} - 1 + (n + 1) + 1 = \frac{(n + 1)^2 + (n + 1) + 2}{2}$$

и твърдението от задачата следва по индукция.

**Оценяване.** (7 точки) 7 т. за пълно решение; по 1 т. за частните случаи  $n = 3, 4, 5$ .

**Забележка.** Твърдението от задачата е вярно за всеки брой единици, различен от 1, 2 и 4 (А. Moscariello, 2021).

**Задачите са предложени от:** 8.1 – Емил Карлов; 8.2, 8.3, 8.4 – Ивайло Кортезов 9.1, 11.1 – Динко Раднев; 9.2 – Александър Иванов; 9.3, 9.4=10.4 – Станислав Харизанов; 10.1, 10.2, 10.3 – Диана Данова; 11.2, 11.3=12.3, 11.4 – Емил Колев; 12.1, 12.2, 12.4 – Николай Николов.