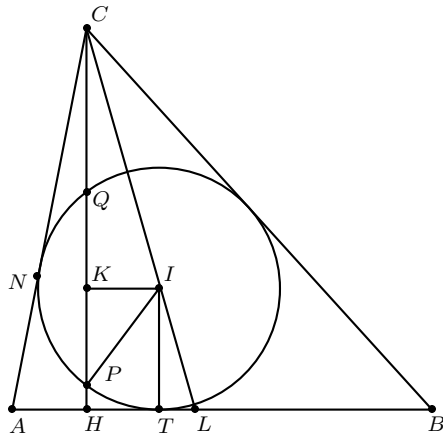


Предложение на Борислав Мирчев

Задача. Ако в триъгълник височината през върха C се разделя от вписаната окръжност в последователно отношение 3:5:1, считано от C , да се намери отношението на страните.

Решение 1. Ще използваме означенията на чертежа и стандартните означения; нека $a > b$.



Ако $HP = x$, от даденото отношение и степен на точка следва, че $HT = \sqrt{HP \cdot HQ} = \sqrt{x \cdot 6x} = \sqrt{6x}$ и $CN = \sqrt{CP \cdot CQ} = \sqrt{3x \cdot 8x} = 2\sqrt{6x}$, т.е.

$$(1) \quad a + b - c = 4\sqrt{6x}.$$

(1 точка)

От триъгълника KPI изразяваме

$$r = \sqrt{KI^2 + KP^2} = \sqrt{HT^2 + \frac{PQ^2}{4}} = \sqrt{6x^2 + 6,25x^2} = 3,5x.$$

(1 точка)

От подобие $KIC \sim HLC$ и известното отношение $\frac{CI}{IL} = \frac{a+b}{c}$ следва, че

$$\frac{a+b}{c} = \frac{CI}{IL} = \frac{CK}{KH} = \frac{3+2,5}{1+2,5} = \frac{11}{7}.$$

Тогава от (1) получаваме $c = 7\sqrt{6}x$ и

$$(2) \quad a + b = 11\sqrt{6}x.$$

(2 точки)

Тъй като $h = 9x$, то $S = \frac{63}{2}\sqrt{6}x^2$.

От $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{2r}{a+b-c} = \frac{7}{4\sqrt{6}}$ намираме $\sin \gamma = \frac{56\sqrt{6}}{145}$. Като заместим във формулата $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$, получаваме

$$(3) \quad ab = \frac{145.9}{8}x^2.$$

(2 точки)

От (2) и (3) следва, че

$$a = \frac{29\sqrt{6}}{4}x, \quad b = \frac{15\sqrt{6}}{4}x$$

и намираме

$$a : b : c = 29 : 15 : 28.$$

Следователно страните на триъгълника са в отношение

$$a : b : c = 29 : 15 : 28 \text{ или } a : b : c = 15 : 29 : 28.$$

(1 точка)

Решение 2. От $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$ по Питагоровата теорема имаме

$$b^2 - AH^2 = h_c^2 = a^2 - BH^2 \implies AH^2 - BH^2 = b^2 - a^2.$$

Тъй като $AH + BH = c$, получаваме

$$(AH - BH)(AH + BH) = b^2 - a^2 \implies AH - BH = \frac{b^2 - a^2}{c} \implies AH = \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c}.$$

(1 точка)

Допускаме, че $a > b$. Тогава

$$HT = AT - AH = \frac{b + c - a}{2} - \frac{b^2 - a^2 + c^2}{2c} = \frac{a - b}{c} \cdot \frac{a + b - c}{2}.$$

От друга страна

$$HT = \sqrt{HP \cdot HQ} = \sqrt{x \cdot 6x} = \sqrt{6x},$$

следователно

$$(*) \quad \frac{a-b}{c} \cdot (p-c) = \sqrt{6x}.$$

Също от степен на точка имаме

$$CN = \sqrt{CP \cdot CQ} = \sqrt{3x \cdot 8x} = 2\sqrt{6x},$$

т.е.

$$(**) \quad p-c = 2\sqrt{6x}.$$

От (*) и (**) следва, че

$$\frac{a-b}{c} = \frac{1}{2}.$$

(2 точки)

Както в първото решение, получаваме $r = 3,5x$.

(1 точка)

От формулата $pr = S = \frac{1}{2}ch_c$ следва, че

$$\frac{a+b+c}{2} \cdot 3,5x = c \cdot 9x \implies \frac{a+b}{c} = \frac{11}{7}.$$

(2 точки)

И накрая, получената система

$$\left| \begin{array}{l} \frac{a-b}{c} = \frac{1}{2} \\ \frac{a+b}{c} = \frac{11}{7} \end{array} \right|$$

е линейна спрямо $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$ и намираме

$$\frac{a}{c} = \frac{29}{28}, \quad \frac{b}{c} = \frac{15}{28},$$

т.е. $a : b : c = 29 : 15 : 28$.

Следователно страните на триъгълника са в отношение

$$a : b : c = 29 : 15 : 28 \text{ или } a : b : c = 15 : 29 : 28.$$

(1 точка)