

ОБЛАСТЕН КРЪГ НА
ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА

13.02.2021 г.

Брошура

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ ЗА
ОЦЕНЯВАНЕ

IV КЛАС

4.1. Сравнете числата A , B и C , ако $A = (496.7 - 495.5) + 2010 : (99 - 97) + 18$, $B = (463 + 464) : (96.4 - 375) + (3.898 - 2.898) : (11 - 5.2)$, а C е числото в $\square$, което прави равенството $237 + 874 + 126 + 363 + 2 \cdot \square = 21 + 349 + 1555 + 1251 + 445 + \square$ вярно.

Решение:

$$A = (496.7 - 495.5) + 2010 : (99 - 97) + 18 = (495.7 + 7 - 495.5) + 2010 : 2 + 18 = 997 + 1005 + 18 = 2020$$

$$B = (463 + 464) : (96.4 - 375) + (3.898 - 2.898) : (11 - 5.2) = 927 : 9 + 898 : 1 = 1001$$

$$237 + 874 + 126 + 363 + 2.\square = 21 + 349 + 1555 + 1251 + 445 + \square$$

$$(237 + 363) + (874 + 126) + 2 \cdot \square = (1555 + 445) + (1251 + 349) + 21 + \square$$

$$600 + 1000 + 2.\square = 2000 + 1600 + 21 + \square$$

$$1600 + 2.\square = 3600 + 21 + \square$$

□= 2021

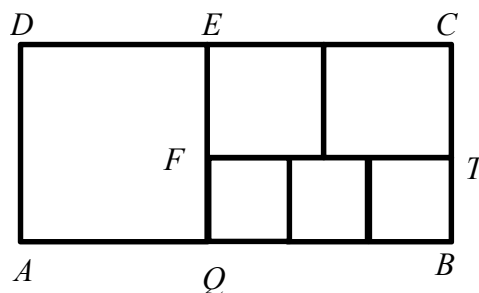
$1001 < 2020 < 2021, B < A < C$

Оценяване: по 2 точки за пресмятане на A и B ; 2 точки за намиране на C ; 1 точка за сравняване на A , B и C .

4.2. Правоъгълникът $ABCD$ се състои от 6 квадрата, като трите малки са еднакви, както и двата средни.

А) Ако лицето на правоъгълника $QBTF$ е 12 кв. см, пресметнете лицето на правоъгълника $ABCD$.

Б) Ако лицето на квадрата $AQED$ е 100 кв. см , пресметнете обиколката на правоъгълника $ABCD$.



Решение:

Да означим половината от страната на най-малките квадрати с x .

А) Страните на правоъгълника $QBT\Gamma$ са $6x$ и $2x \Rightarrow S_{QBT\Gamma} = 12x \cdot x = 12 \Rightarrow x \cdot x = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ cm}$

(1 T.)

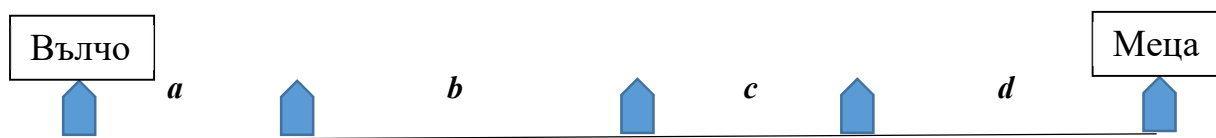
За страните на правоъгълника $ABCD$ получаваме $AB = 3.2.x + 5.x = 11.x = 11 \text{ см}$ и $BC = 2.x + 3.x = 5x = 5 \text{ см}$ (2 т.)

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 11.5 = 55 \text{ кв. см. (1 т.)}$$

Б) От $S_{AQED} = 100 \text{ кв. см} \Rightarrow AQ = AD = CB = 10 \text{ см}, \quad BC = 5.x \Rightarrow x = 10 : 5 = 2 \text{ см}, \quad \text{а}$
 $QB = 6.x = 12 \text{ см} \text{ (2 т.)}$
 $\Rightarrow P_{ABCD} = 2.AB + 2.AD = 2.(10 + 12) + 2.10 = 64 \text{ см} \text{ (1 т.)}$

4.3. Между къщите на Вълчо и Меца живеят Зайо, Лиса и Ежко. На къщата на Вълчо са написани разстоянията в метри от неговата къща до къщите на Зайо, Лиса и Ежко. На къщата на Меца са написани разстоянията в метри от нейната къща до къщите на Зайо, Лиса и Ежко. На рождения си ден Зайо си пожелал Вълчо и Меца да му подарят общо толкова моркови, колкото метра е разстоянието от къщата на Вълчо до къщата на Меца. На партито Вълчо казал: „Аз не зная какво е разстоянието от моята къща до тази на Меца и затова събрах разстоянията от моята къща, до къщите на Зайо, Лиса и Ежко, разделих полученият сбор на 2 и ти нося 420 моркова“. Меца казала: „И аз направих същото, но с разстоянията от моята къща до тези на Зайо, Лиса и Ежко, и ти нося 531 моркова“. Намерете разстоянието между къщите на Вълчо и Меца.

Решение:



Без ограничения означаваме разстоянията между къщите с a, b, c и d .

Сборът на Вълчо е: $a + (a + b) + (a + b + c) = 3.a + 2.b + c = 420.2 = 840$ метра (2 т.).

Сборът на Меца е: $d + (d + c) + (d + c + b) = 3.d + 2.c + b = 531.2 = 1062$ метра (2 т.).

Събираме двете равенства $\Rightarrow 3.a + 3.b + 3.c + 3.d = 840 + 1062 = 1902$ метра, три пъти по-малко разстояние е: $a + b + c + d = 634$ метра (2 т.).

Разстоянието между къщите на Вълчо и Меца е 634 метра (1 т.).

V КЛАС

5.1 В клуб „Любима математика“ участват ученици от IV, V, VI и VII клас. Учениците от IV клас са $\frac{3}{8}$ от всичките ученици, а петокласниците са с 6 по-малко от тях. Математиците от VI клас са 2 пъти повече от учениците от V клас. Останалите ученици са от VII клас и са

$\frac{1}{16}$ част от всички участници в клуба. Колко е броя на всички участници в клуба и по колко ученици има от всеки клас?

Решение:

От $\frac{3}{8} + \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$ са учениците от IV и VII клас **(1 т.)**

$1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}$ са учениците от V и VI клас **(1 т.)**

VI клас са 2 пъти повече от V клас - $\frac{9}{16} : 3 = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{16}$ са петокласниците **(1 т.)**

$\frac{3}{8} - \frac{3}{16} = \frac{3}{16} \Rightarrow \frac{3}{16}$ с толкова части IV клас са повече от V клас **(1 т.)**

$\frac{3}{16}$ от всички ученици са 6 **(1 т.)**

$\frac{3}{16} \cdot x = 6 \Rightarrow x = 32$ са всички ученици, членове на клуба **(1 т.)**

За краен резултат: IV клас – 12 ученици, V клас – 6 ученици; VI клас – 12 ученици и VII клас – 2 ученици **(1 т.)**

5.2 Сравнете числата A , B и C , ако:

A е дроб от вида $\frac{a}{b}$, на която числителят е най-голямото естествено число, за което $\frac{6}{a}$ е неправилна дроб и знаменателят е най-малкото естествено число, по-голямо от 1, за което $\frac{b}{539}$ е съкратима дроб;

$$B = \frac{15}{5.8} + \frac{15}{8.11} + \frac{15}{11.14} + \frac{15}{14.17} + \frac{15}{17.20} + \frac{15}{20.23} + \frac{15}{23.26} + \frac{15}{26.29};$$

C е неизвестното число в равенството: $\left[\left(20\frac{1}{8} - 5\frac{1}{4} \right) : \left(10\frac{1}{2} - 7\frac{2}{3} \right) + 2x \right] \cdot \frac{1}{8} - 3 : 4 = \frac{1}{8}$

Решение:

$\frac{6}{a}$ е неправилна дроб $\Rightarrow a \leq 6$. Числителят на дробта е 6.

$539 = 7 \cdot 7 \cdot 11 \Rightarrow$ Знаменателят на дробта е 7. Тогава $A = \frac{6}{7}$.

$$B = 5 \left(\frac{3}{5.8} + \frac{3}{8.11} + \frac{3}{11.14} + \frac{3}{14.17} + \frac{3}{17.20} + \frac{3}{20.23} + \frac{3}{23.26} + \frac{3}{26.29} \right)$$

$$B = 5 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \frac{1}{17} - \frac{1}{20} + \frac{1}{20} - \frac{1}{23} + \frac{1}{23} - \frac{1}{26} + \frac{1}{26} - \frac{1}{29} \right)$$

$$B = 5 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{29} \right) = 5 \cdot \frac{24}{5 \cdot 29} = \frac{24}{29}$$

$$\left[\left(20 \frac{1}{8} - 5 \frac{1}{4} \right) : \left(10 \frac{1}{2} - 7 \frac{2}{3} \right) + 2x \right] \cdot \frac{1}{8} - 3 : 4 = \frac{1}{8}$$

$$\left[14 \frac{7}{8} : 2 \frac{5}{6} + 2x \right] \cdot \frac{1}{8} - \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\left[\frac{21}{4} + 2x \right] \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{3}{4}$$

$$\left[\frac{21}{4} + 2x \right] \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{21}{4} + 2x = \frac{7}{8} : \frac{1}{8}$$

$$2x = 7 - \frac{21}{4}$$

$$x = \frac{7}{8}. \text{ Тогава } C = \frac{7}{8}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{48}{56}, \frac{7}{8} = \frac{49}{56} \Rightarrow \frac{6}{7} < \frac{7}{8}$$

$$\frac{6}{7} = \frac{174}{203}, \frac{24}{29} = \frac{168}{203} \Rightarrow \frac{24}{29} < \frac{6}{7}$$

$$\frac{24}{29} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8} \quad B < A < C$$

Оценяване:

За намиране на A – **1 т.** За намиране на B – **2 т.**

За намиране на C – **2 т.** За сравняване A , B и C – **2 т.**

5.3. Най-голямото от няколко последователни естествени числа е 4 пъти по-голямо от най-малкото.

А) Ако най-малкото от числата е 11, то колко на брой са числата?

Б) Ако числата са 301 на брой, то кое е най-голямото от тях?

В) Ако броят на числата, изразен с двуцифрено число, е възможно най-голям, то колко е сборът на всички числа?

Решение:

А) $11.4 = 44$

Брой числа: $44 - 11 + 1 = 34$ числа (1 т.)

Б) Нека първото число е x , а последното y : $y - x + 1 = 301$ $y = x + 300$ (1 т.)

$$\begin{aligned} y = x + 300 &= 4x & 3x &= 300 & x &= 100 \\ y &= 100 + 300 = 400 \end{aligned} \quad (1 \text{ т.})$$

В) Най-голямото двуцифрено число е 99. Нека b е най-голямото число, отговарящо на условието, а най-малкото е a : $b - a + 1 = 99$ $b = a + 98$

$$b = a + 98 = 4a \quad 3a = 98 - \text{н.р.}$$

$$b = a + 97 = 4a \quad 3a = 97 - \text{н.р.}$$

$$b = a + 96 = 4a \quad 3a = 96 \quad a = 32$$

$$b = 32 + 96 = 128$$

$$a = 32, b = 128 \quad (2 \text{ т.})$$

$$\underbrace{32 + 33 + 34 + \dots + 126 + 127 + 128}_{97 \text{ числа}} =$$

$$= \underbrace{32 + 33 + 34 + \dots + 126 + 127}_{96 \text{ числа}} + 128$$

$$= (32 + 127) \cdot (96 : 2) + 128 = 159 \cdot 48 + 128 = 7632 + 128 = 7760 \quad (2 \text{ т.})$$

VI КЛАС

6.1 Моето колело е с две различни по големина гуми – предната е с диаметър 42 cm, а задната с радиус 35 cm.

А) Колко пълни завъртания ще направи всяка от гумите за един километър пробег?

Б) След колко метра двете гуми ще са в същото положение, в което са в момента на тръгване?

При пресмятанията използвайте приблизителната стойност $\pi \approx \frac{22}{7}$.

Решение:

А) Намираме дължината на всяка от гумите. $C_{\text{предна}} = 42\pi = \frac{42 \cdot 22}{7} = 132 \text{ cm}$, (1 т.)

$$C_{\text{задната}} = 70\pi = \frac{70 \cdot 22}{7} = 220 \text{ cm.} \quad (1 \text{ т.})$$

$$100000 : 132 = 757, (57) \quad (1 \text{ т.}), \quad 100000 : 220 = 454, (54) \quad (1 \text{ т.})$$

Отг.: предната - 757, а задната - 454 пълни завъртания. (1 т.)

Б) $a.132 = b.220$ (0,5 т.)

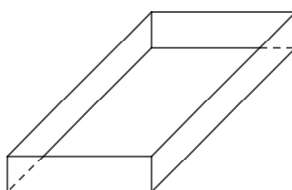
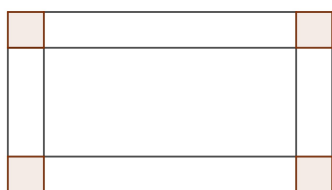
$$a.3.44 = b.5.44$$

$a.3 = b.5$, при което най-малките стойности за a и b , за които се постига равенство е за $a = 5$ и $b = 3$ (1 т.) или след 6,60 m двете гуми ще са в същото положение в което са били в момента на тръгването (0,5 т.)

6.2 Даден е правоъгълен лист хартия с размери 21 cm и 30 cm. От ъглите му са изрязани квадрати, а от останалата част на листа е направена кутия без капак. Намерете дължината на страната на квадрата между 1 cm и 6 cm, така че обемът на кутията да е най-голям, ако:

А) дължината на страната на квадрата е цяло число в сантиметри;

Б) дължината на страната на квадрата се дава с точност до милиметър.



Решение:

А) (3 т.) Правоъгълен паралелепипед като a – дължина, b – ширина, c – височина, която е дължината на страната на изрязаните квадрати. Тогава:

c	a	b	V
1	28	19	532
2	26	17	884
3	24	15	1080
4	22	13	1144
5	20	11	1100
6	18	9	972

Страната на квадрата е 4 cm.

Б) (4 т.) Правоъгълен паралелепипед като a – дължина, b – ширина, c – височина, която е дължината на страната на изрязаните квадрати

$c \text{ (mm)}$	$a \text{ (mm)}$	$b \text{ (mm)}$	$V \text{ (mm}^3\text{)}$
38	224	134	1140608
39	222	132	1142856
40	22	13	1144000
41	218	128	1144064
42	216	126	1143072

Страната на квадрата е 41 mm.

6.3 Измежду естествените числа от 1 до 2021 трябва да се отдели част, така че сборът на всеки две числа от тази част да е кратен на 6. От колко числа най-много може да се състои такава част? (Изисква се обосновка).

Решение:

Нека x, y, z са произволни три числа от отделената част. Имаме

$$x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$$

Изразите в скобите са кратни на 6, значи при деление на 6 сборът $x + y + z$ дава същия остатък както x и както z , т.е. произволни две числа от отделената част дават еднакви остатъци при деление на 6. **(2 т.)**

Тъй като $x + z$ е кратно на 6 и остатъците при деление на 6 на x и z са равни, то тези остатъци са или 0, или 3. **(2 т.)**

Следователно отделената максимална част се състои от кратните на 6, които са от 1 до 2021, или от числата, даващи остатък 3, които са от 1 до 2021. **(1 т.)**

Измежду естествените числа от 1 до 2021 кратните на 6 са цялата част на $2021:6$, т.е. 336. **(1 т.)**

Числата, даващи остатък 3, са 337 – те се образуват от кратно на 6 плюс 3, като тук броим и $3 = 0 \cdot 6 + 3$. Отговор: 337. **(1 т.)**

VII КЛАС

7.1. Дадени са три различни ненулеви числа a, b и c . Ако всяко от тях се увеличи с 1, то произведението на новополучените числа също ще се увеличи с 1. Ако всяко от първоначалните числа се увеличи с 2, то произведението им също ще се увеличи с 2.

А) Намерете стойността на израза $a^2 + b^2 + c^2$.

Б) Ако $\frac{a.c}{b} + a = \frac{b.c}{a} + b$, намерете стойността на израза $\frac{c}{a} + \frac{c}{b}$.

Решение:

А) От $(a+1)(b+1)(c+1) = abc + 1 \Rightarrow ab + ac + bc + a + b + c = 0$ (0,5 т.),

от $(a+2)(b+2)(c+2) = abc + 2 \Rightarrow 2ab + 2ac + 2bc + 4a + 4b + 4c + 6 = 0$ (0,5 т.),

$2(ab + ac + bc + a + b + c) + 2(a + b + c) = -6 \Rightarrow a + b + c = -3$ и $ab + ac + bc = 3$ (1 т.).

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ (1 т.), $(-3)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2.3$

Отг.: $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ (1 т.).

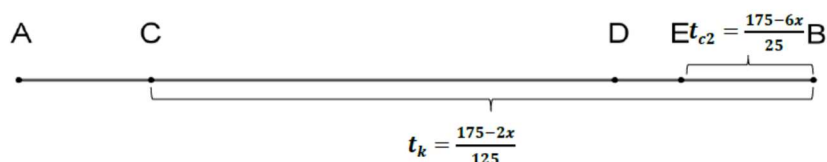
Б) $\frac{a.c}{b} + a = \frac{b.c}{a} + b \Rightarrow \frac{a.c}{b} - \frac{b.c}{a} = b - a, \frac{c(a^2 - b^2)}{ab} = b - a \Rightarrow \frac{c(a+b)}{ab} = -1$ (1 т.).

$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{c(a+b)}{ab}$ (1 т.).

Отг.: -1 (1 т.)

7.2. Два сала трябва да бъдат доставени на разстояние 35 km по течението на река Дунав. За по-бързо придвижване е използван кораб, който може да превозва само по един сал. Скоростта на кораба по течението на реката е 25 km/h и скоростта на течението е 5 km/h. Най-малко за колко време може да се доставят и двата сала, ако корабът се връща само веднъж за другия сал и времето за разтоварване и товарене на саловите на кораба се пренебрегва?

Решение:



Времето за доставяне на саловите ще е най-малко, ако всички пристигнат едновременно в крайното пристанище B (1 т.).

Нека корабът да превозва първия сал на разстояние x от начално пристанище A до точка D, а вторият сал през това време да се пусне по течението на реката.

Времето, за което корабът изминава това разстояние, е $t_k = \frac{x}{25}$. За същото време вторият

сал ще измине разстояние $S_{c_2} = \frac{5x}{25} = \frac{x}{5}$ km. В точка D корабът пуска първия сал по

течението и се връща за втория сал, с който ще се срещнат в точка C след време

$$t_k = \frac{x - \frac{x}{5}}{5 + 15} = \frac{x}{25} h. \text{ За това време всеки от двата сала ще измине разстояние } S = \frac{5x}{25} = \frac{x}{5} km.$$

От този момент корабът и първият сал трябва да пристигнат едновременно в точка B . Те тръгват едновременно от точки C и E към B .

$$\begin{aligned} \text{От уравнението} \quad \frac{35 - \frac{2x}{5}}{25} &= \frac{35 - x - \frac{x}{5}}{5} \\ \frac{175 - 2x}{125} &= \frac{175 - 6x}{25} \end{aligned}$$

намираме $x = 25 km$ (**3 т.**).

Времето за доставяне на саловете намираме от времето за доставяне на първия сал

$$t = \frac{x}{25} + \frac{35 - x}{5} = \frac{25}{25} + \frac{10}{5} = 3 \text{ (**3 т.**)}.$$

Отг. 3 часа

Забележка: Ако задачата е решена с последователно превозване на саловете до крайна точка и е получено време $5\frac{2}{15} h$, то се оценява с (**2 т.**).

7.3. Да се намерят всички четирицифрени числа от вида $\overline{aabc}$, които са кратни на 36 и числото $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ се дели на 57.

Решение:

От условието получаваме, $\overline{bc}$ се дели на 4 и $2a + b + c$ се дели на 9. От друга страна 57 дели $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a + b + c)$, откъдето 19 дели $a + b + c \leq 27$, т.е. $a + b + c = 19$ (**3 т.**).

Освен това представяме $2a + b + c = a + (a + b + c) = a + 19$. От тук следва, че единствената възможност $a = 8$. Тогава $b + c = 11$. Понеже c е четна цифра и b е нечетна, от делимостта на 4 получаваме два варианта - $c = 2, b = 9$ и $c = 6, b = 5$ (**3 т.**).

Окончателно се получиха две решения $\overline{aabc} = 8892$ и $\overline{aabc} = 8856$ (**1 т.**)