	НАЦИОНАЛНА ПРИРОДО-МАТЕМАТИЧЕСКА ГИМНАЗИЯ „АКАД. Л. ЧАКАЛОВ”

XVIII МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ „РИКИ”

14 май 2011г.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 4 ЧАСА

На всяка от десетте задачи дайте подробно и добре обосновано решение. Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Крайната оценка се получава по формулата $N=\frac{K}{10}+2$, където K е общия брой точки.

Пожелаваме Ви **УСПЕХ!**

ЗАДАЧА 1. Да се реши уравнението

$$x\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right).$$

ЗАДАЧА 2. Да се реши неравенството

$$\left(a^3-1\right)x^2+\frac{\left(2x-a\right)^2}{2}-\left(a+1\right)^3x^2<-3a\left(a+1\right)x^2,$$

където a е най-голямото число, за което неравенството

$$\left(x-1\right)\left(x-4\right)+\left(a^2-6\right)x-8\geq\left(x+2\right)\left(x+3\right)$$ няма решение.

ЗАДАЧА 3. Дадено е уравнението $a\left(3x-4\right)-1=4a^2+x$, където a е параметър. Да се намерят стойностите на a, за които уравнението има за корен числото

$$M=\frac{3.2^{15}.16^2-5.2^2.\left(2^{10}\right)^2}{-2^8.\left(-4\right)^7}.$$

ЗАДАЧА 4. Намерете целите числа, които са решения на неравенството $\frac{4}{2x+3}>1$.

ЗАДАЧА 5. Точно една от цифрите на четирицифрено естествено число е 0. При зачеркване на нулата това число се намалява 9 пъти. Намерете всички такива числа.

ЗАДАЧА 6. Даден е триъгълник ABC, в който $\sphericalangle ACB = 45^\circ$. Върху страните AC и BC външно за триъгълника са построени съответно квадратите $ACMN$ и $BCPQ$. Ако D е средата на отсечката NQ, да се докаже, че $MD = PD$.

ЗАДАЧА 7. Две машини могат да асфалтират заедно $\frac{2}{3}$ от една улица за 2 часа и 24 минути. Производителността на втората машина е с $33\frac{1}{3}\%$ по-малка от тази на първата. След като първата машина асфалтирала половината от улицата, дошла и втората машина. В колко часà първата машина е асфалтирала 6 пъти повече от втората, ако работата е започнала в 8 часà сутринта?

ЗАДАЧА 8. Точката N е среда на бедрото BC на трапеца $ABCD(AB \parallel CD, AB > CD)$. Правата през точка N, която е успоредна на AD пресича AB в точка $P(P \in AB)$ и продължението на CD в точка M. Ако диагоналите AC и BD са перпендикулярни, $CP = 10cm$ и височината на трапеца е $6cm$, да се намери лицето му.

ЗАДАЧА 9. Даден е полиномът $N = x^4 + 4$, където x е естествено число.

а) да се разложи N на множители;

б) да се намери най-малката стойност на x, при която N се дели на 37.

ЗАДАЧА 10. Даден е равностранен триъгълник ABC и такава точка M, че $\sphericalangle BCM = 75^\circ$ и $\sphericalangle BAM = 45^\circ$. Да се намери ъгъл ABM.