понеделник, 19. юли 2021

Задача 1. Нека $n \geqslant 100$ е естествено число. Иван написал числата $n, n+1, \ldots, 2n$ по веднъж, всяко на отделна карта. След това, той разбъркал тези $n+1$ карти и ги разделил на две части. Да се докаже, че поне в една от частите има две карти, такива че сумата от написаните върху тях числа е точен квадрат.

Задача 2. Да се докаже, че неравенството

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

е изпълнено за всички реални числа $x_1, \ldots, x_n$.

Задача 3. Точка D е вътрешна за остроъгълен триъгълник ABC, $AB > AC$, и е такава, че $\angle DAB = \angle CAD$. Върху отсечката AC е взета точка E така че $\angle ADE = \angle BCD$. Върху отсечката AB е взета точка F така че $\angle FDA = \angle DBC$. Върху правата AC е взета точка X така че $CX = BX$. Нека O_1 и O_2 са центровете на описаните окръжности съответно за триъгълниците ADC и EXD. Да се докаже, че правите BC, EF и O_1O_2 се пресичат в една точка.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.

вторник, 20. юли 2021

Задача 4. Нека Γ е окръжност с център I, а $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, за който всяка от отсечките AB, BC, CD и DA се допира до Γ. Нека Ω е окръжността, описана около триъгълника AIC. Продължението на BA след A пресича Ω в точка X, а продължението на BC след C пресича Ω в точка Z. Продълженията на AD и CD след D пресичат Ω съответно в точки Y и T. Да се докаже, че

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Задача 5. Две катерички, Безделко и Скокливко, събрали общо 2021 ореха за зимата. Скокливко номерирал орехите от 1 до 2021 и изкопал в земята 2021 малки дупки по окръжност около тяхното любимо дърво. На следващата сутрин Скокливко забелязал, че Безделко е поставил по един орех във всяка от дупките, но не е обърнал внимание на номерацията. Разстроеният Скокливко решил да пренареди орехите чрез последователност от 2021 хода, като на k-тия ход разменя местата на двата ореха, съседни на ореха с номер k. Да се докаже, че съществува стойност на k, за която на k-тия ход Скокливко е разменил местата на орехи с номера a и b, такива че $a < k < b$.

Задача 6. Нека $m \geqslant 2$ е естествено число, A е крайно множество от (не непременно положителни) цели числа, а $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ са подмножества на A. Известно е, че за всяко $k = 1, 2, \ldots, m$ сумата от елементите на B_k е m^k. Да се докаже, че A съдържа поне $m/2$ елемента.

Language: Bulgarian

Време за работа: 4 часа и 30 минути.
Всяка задача се оценява със 7 точки.