



Понеделник, 18 Юли, 2011

**Задача 1.** За всяко множество  $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  от четири различни естествени числа полагаме  $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ . Нека  $n_A$  е броят на двойките  $(i, j)$ , за които  $1 \leq i < j \leq 4$  и  $a_i + a_j$  дели  $s_A$ . Да се намерят всички множества  $A$  от четири различни естествени числа такива, че числото  $n_A$  е максимално.

**Задача 2.** Нека  $S$  е крайно множество от поне две точки в равнината, никои три от които не са колинеарни. *Мелница* наричаме следния процес. Избираме начална права  $l$ , минаваща през точно една точка  $P$  от  $S$ . След това завъртаме правата по часовниковата стрелка около *центъра*  $P$ , докато не мине за първи път през друга точка от  $S$ . Избираме тази точка,  $Q$ , за нов център и сега въртим правата по часовниковата стрелка около  $Q$ , докато не срещне точка от  $S$ . Процесът продължава безкрайно.

Да се докаже, че съществува точка  $P$  от  $S$  и права  $l$  през  $P$  така, че мелницата с начална права  $l$  има за център всяка точка от  $S$  безбройно много пъти.

**Задача 3.** Нека  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  е такава функция, че

$$f(x+y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

за произволни  $x, y \in \mathbb{R}$ . Да се докаже, че  $f(x) = 0$  за всяко  $x \leq 0$ .