Понеделник, 18 Юли, 2011

Задача 1. За всяко множество $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ от четири различни естествени числа полагаме $s_A = a_1+a_2+a_3+a_4$. Нека n_A е броят на двойките (i, j), за които $1 \leq i < j \leq 4$ и a_i+a_j дели s_A. Да се намерят всички множества A от четири различни естествени числа такива, че числото n_A е максимално.

Задача 2. Нека S е крайно множество от поне две точки в равнината, никои три от които не са колинеарни. *Мелница* наричаме следния процес. Избираме начална права l, минаваща през точно една точка P от S. След това завъртаме правата по часовниковата стрелка около *центъра* P, докато не мине за първи път през друга точка от S. Избираме тази точка, Q, за нов център и сега въртим правата по часовниковата стрелка около Q, докато не срещне точка от S. Процесът продължава безкрайно.

Да се докаже, че съществува точка P от S и права l през P така, че мелницата с начална права l има за център всяка точка от S безбройно много пъти.

Задача 3. Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е такава функция, че

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

за произволни $x, y \in \mathbb{R}$. Да се докаже, че $f(x) = 0$ за всяко $x \leq 0$.

Време: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки

Вторник, 19 Юли, 2011

Задача 4. Нека $n \in \mathbb{N}$. Дадени са везна и n тежести с тегла $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Всичките n тежести се поставят на везната последователно за n хода, т.е. на всеки от ходовете се избира една от тежестите, която още не е поставена на везната, и тази тежест се слага на лявото или на дясното блюдо. При това тежестите се поставят така, че в нито един момент дясното блюдо не е по-тежко от лявото. Да се намери броят на начините, по които можем да изпълним тези n хода.

Задача 5. Нека $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ е такава функция, че $f(m) - f(n)$ се дели на $f(m-n)$ за всеки $m, n \in \mathbb{Z}$. Да се докаже, че за произволни $m, n \in \mathbb{Z}$, за които $f(m) \leq f(n)$, числото $f(n)$ се дели на $f(m)$.

Задача 6. Нека Γ е описаната около остроъгълен $\triangle ABC$ окръжност. Нека l е допирателна към Γ, а l_a, l_b и l_c са симетричните прави на l относно BC, CA и AB. Да се докаже, че описаната окръжност около триъгълника, определен от l_a, l_b и l_c, се допира до Γ.

Време: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява със 7 точки