

Министерство на образованието и науката

72. Национална олимпиада по математика Областен кръг

12 февруари 2023 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 8.1. Да се подредят по големина реалните корени на уравнението

$$(3x(x+2) - 16)(x^2 + 2x + 10\sqrt{6} - 30) = 0.$$

Отговор. $-6 + \sqrt{6} < -1 - \frac{\sqrt{57}}{3} < -1 + \frac{\sqrt{57}}{3} < 4 - \sqrt{6}$.

Решение. Търсим корените на $3x^2 + 6x - 16 = 0$ и на $x^2 + 2x + 10\sqrt{6} - 30 = 0$. Първото уравнение има съкратена дискриминанта $9 + 48 = 57$ и корени $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{3} = -1 \pm \frac{\sqrt{57}}{3}$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$.

При второто уравнение е по-удобно да отделим точен квадрат:

$$x^2 + 2x + 1 = 25 - 10\sqrt{6} + 6$$

$$(x+1)^2 = (5 - \sqrt{6})^2$$

$$x+1 = \pm(5 - \sqrt{6}),$$

откъдето намираме $x_3 = 4 - \sqrt{6} > 0$ и $x_4 = -6 + \sqrt{6} < 0$.

За да подредим числата по големина, трябва да преценим дали:

- $4 - \sqrt{6} > -1 + \frac{\sqrt{57}}{3}$, т.е. $5 > \sqrt{6} + \frac{\sqrt{57}}{3}$, еквивалентно на $25 > 6 + \frac{19}{3} + 2\sqrt{38}$, на $\frac{38}{3} > 2\sqrt{38}$ и на $\sqrt{38} > 6$, което е вярно.
- $-6 + \sqrt{6} < -1 - \frac{\sqrt{57}}{3}$, еквивалентно на $5 > \sqrt{6} + \frac{\sqrt{57}}{3}$, което вече видяхме, че е вярно.

Окончателно подредбата на корените по големина е

$$-6 + \sqrt{6} < -1 - \frac{\sqrt{57}}{3} < -1 + \frac{\sqrt{57}}{3} < 4 - \sqrt{6}.$$

Оценяване. (7 точки) 1 т. за правилно пресмятане на $x_{1,2}$; 1 т. за правилно пресмятане на $x_{3,4}$ (не непременно в указания тук вид, вкл. е допустимо използване на вложен радикал); 2 т. за доказване, че $4 - \sqrt{6} > -1 + \frac{\sqrt{57}}{3}$; 2 т. за доказване, че $-6 + \sqrt{6} < -1 - \frac{\sqrt{57}}{3}$; 1 т. за завършване.

Задача 8.2. Точките M , N и D са средите съответно на страните AC , BC и AB в триъгълника ABC , а точките E и F съответно от страните AC и BC са такива, че $DE = DF$ и $\angle EDF = \angle ACB$.

а) Да се докаже, че $EM = FN$.

б) Да се докаже, че $4DE \geq AC + BC$. Има ли триъгълници ABC , за които $4DE = AC + BC$? Ако има, то кои са всички такива?

Решение. а) Явно $MDNC$ е успоредник и $\angle MDN = \angle ACB = \angle EDF$, откъдето без ограничение E е между A и M и F е между C и N (позволяваме $E \equiv M$ или $F \equiv N$). Получаваме

$\angle MDE = \angle EDF - \angle MDF = \angle MDN - \angle MDF = \angle FDN$. Нека P е петата на перпендикуляра от E към DM и Q е петата на перпендикуляра от F към DN . Тогава $\triangle DPE \cong \triangle DQF$ по хипотенуза и ъгли, откъдето $PE = QF$. Понеже $\angle EMP = \angle AMD = 180^\circ - \angle CND = \angle FNQ$, следва $\triangle EMP \cong \triangle FNQ$ по катет и ъгли, с което заключаваме $EM = FN$.

б) Нека точката R върху правата DN е такава, че N е между D и R и $RN = DM$. Тогава $\triangle FNR \cong \triangle EMD$, откъдето $DE = FR$. Сега от неравенството на триъгълника, приложено за триъгълника DFR , получаваме

$$4DE = 2(DE + DF) = 2(DF + FR) \geq 2DR = 2(DN + NR) = 2DN + 2DM = AC + BC.$$

Равенство се достига точно когато F лежи на DR , т.е. $F \equiv N$ – съответно $E \equiv M$ (понеже $EM = FN$ от а)), а от друга страна $DM = DN$ е еквивалентно на $AC = BC$. Окончателно, равенство се достига тогава и само тогава когато $AC = BC$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за а), от които 1 т. за $\angle MDE = \angle FDN$, 1 т. за въвеждането на P и Q и $\triangle DPE \cong \triangle DQF$ и 1 т. за довършване; 4 т. за б), от които 2 т. за доказване на неравенството (от които 1 т. за въвеждането на R и $\triangle FNR \cong \triangle EMD$), 1 т. за обосновка, че $E \equiv M$ и $F \equiv N$ при равенство и 1 т. за заключението, че само $AC = BC$ достига равенство. Не се отнемат точки за неразгледани случаи за разположенията на E и F върху AC и BC .

Задача 8.3. Да се реши в естествени числа уравнението $2^a - 4^b = 3^c + 1$.

Отговор. $(a, b, c) = (3, 1, 1)$, $(a, b, c) = (5, 1, 3)$.

Решение. Явно $a > 2b$. Ако $b \geq 2$, то непременно $3^c \equiv 7 \pmod{8}$ и предвид $3^1 \equiv 3 \pmod{8}$, $3^2 \equiv 1 \pmod{8}$, получаваме противоречие. Значи $b = 1$, т.е. $2^a = 3^c + 5$. Проверка при $a \leq 5$ дава $a = 3$, $c = 1$ и $a = 5$, $c = 3$; нека $a \geq 6$. Предвид, че имаме решение за $a = 5$, логично е да разгледаме модул 64. Пресмятаме $3^{16} \equiv 1 \pmod{64}$ и $3^c \equiv -5 \pmod{64} \Leftrightarrow c \equiv 11 \pmod{16}$. От $3^{16} - 1 = (3^8 - 1)(3^8 + 1) = 2^6 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 193$ имаме $3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ и $3^c \equiv 3^{11} \equiv 7 \pmod{17}$, откъдето $2^a \equiv 12 \pmod{17}$. Обаче директни пресмятания за $a = 1, 2, \dots, 8$ (и $2^8 \equiv 1 \pmod{17}$) показват, че последното е невъзможно.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за верен отговор, 1 т. за отхвърляне на $b \geq 2$, 1 т. за пресмятания с модул 64, 1 т. за $n \equiv 11 \pmod{16}$, 1 т. за пресмятания с модул 17, 2 т. за довършване.

Задача 8.4. В торба има 14 жълти, 13 сини, 13 червени и 12 зелени топки. Всеки ден от торбата се вадят по случаен начин 14 топки и на нов лист се записва по колко топки има от всеки цвят (и цветът се указва), след което топките се връщат в торбата. Какъв е най-малкият брой дни, след който е сигурно, че на поне 4 от листовите ще е записано едно и също нещо?

Отговор. 2023.

Решение. Кодираме избора на a жълти, b сини, c червени и d зелени с поредица от a единици, нула, b единици, нула, c единици, нула, d единици. В кода има общо 14 единици и 3 нули, така че броят на всички такива кодове с $0 \leq a, b, c, d \leq 14$ е

$$\frac{17!}{14! \cdot 3!} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{6} = 17 \cdot 40 = 680.$$

На всеки такъв код съответства различен възможен избор, с изключение на следните (a, b, c, d) :

$$(0, 14, 0, 0); (0, 0, 14, 0); (0, 0, 0, 14); (1, 0, 0, 13); (0, 1, 0, 13); (0, 0, 1, 13).$$

И така, има $680 - 6 = 674$ възможни листа. За да е сигурно, че ще се появят поне 4 от един вид, според принципа на Дирихле са необходими и достатъчни $3 \cdot 674 + 1 = 2023$ дни.

Оценяване. (7 точки) 5 т. за пресмятане на броя различни резултати от изваждането (при кодиране: 1 т. за избор на адекватно кодиране, 2 т. за преброяване на всички кодове и 2 т. за изключване на излишните); 2 т. за завършване.

Задача 9.1. Нека a, b, c са такива, че $(a - b + c)(4a - 2b + c) \leq 0$. Да се докаже, че $b^2 \geq 4ac$.

Решение. Нека $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ако $a = 0$, то $b^2 - 4ac = b^2 \geq 0$ за всяко b . Нека $a \neq 0$. Тогава $f(-1) = a - b + c$, а $f(-2) = 4a - 2b + c$. Също така, дискриминантата на f е точно $b^2 - 4ac$. Сега, от даденото следва, че $f(-1)f(-2) \leq 0$, т.е. едната от двете стойности е неотрицателна, а другата - неположителна. Но тогава в интервала $[-2, -1]$ има корен на f и значи дискриминантата е неотрицателна.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за случая $a = 0$; 3 т. за дефиниране на f ; 3 т. за довършване.

Задача 9.2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Върху страната CD са избрани точки P и Q (като Q е между C и P), за които $\angle DAP = \angle CBQ$ и $\angle PAQ = \angle QBP$, а $DP = 4$, $PQ = 1$ и $QC = 5$.

а) Да се докаже, че $ABCD$ е вписан четириъгълник.

б) Продълженията на страните AB и CD се пресичат в точка R , като A е между R и B . Да се намери дължината на отсечката RD .

Отговор. б) $RD = 20$.

Решение. а) От $\angle PAQ = \angle QBP$ следва, че $ABQP$ е вписан четириъгълник. Тогава:

$$\begin{aligned}\angle ABC + \angle CDA &= \angle ABQ + \angle CBQ + \angle APQ - \angle DAP = \\ &= \angle ABQ + \angle APQ + (\angle CBQ - \angle DAP) = \angle ABQ + \angle APQ = 180^\circ.\end{aligned}$$

Следователно четириъгълникът $ABCD$ също е вписан в окръжност.

б) От вписаните четириъгълници в а) имаме, че от една страна $\triangle RAP \sim \triangle RQB$ и значи $RP/RB = RA/RQ$, а от друга $\triangle RAD \sim \triangle RCB$ и значи $RD/RB = RA/RC$. Следователно

$$RP \cdot RQ = RA \cdot RB = RD \cdot RC \quad \implies \quad RD \cdot RC = RP \cdot RQ.$$

Да означим $RD = x$. Получаваме $x(x + 10) = (x + 4)(x + 5)$. Оттук $x = 20$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за а) (2 т. за $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ и 1 т. за извод); 4 т. за б) (3 т. за $RD \cdot RC = RP \cdot RQ$ и 1 т. за решаване на $x(x + 10) = (x + 4)(x + 5)$).

Задача 9.3. Да се намерят всички цели неотрицателни числа n , за които $2(343^n + 1)$ е точен квадрат.

Решение. Очевидно $n = 0$ е решение. Ще докажем, че други решения няма. Наистина, $343 = 7^3$, откъдето

$$343^n + 1 = (7^n + 1)(7^{2n} - 7^n + 1).$$

Но

$$7^{2n} - 7^n + 1 = (7^n + 1)(7^n - 2) + 3 \implies (7^n + 1, 7^{2n} - 7^n + 1) = (7^n + 1, 3) = 1,$$

защото $7^n \equiv 1 \pmod{3}$ и значи $3 \nmid 7^n + 1$. Ако допуснем, че съществува $n > 0$ удовлетворяващо условието, имаме само две възможности

$$\left| \begin{array}{l} 7^n + 1 = 2a^2 \\ 7^{2n} - 7^n + 1 = b^2 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} 7^n + 1 = a^2 \\ 7^{2n} - 7^n + 1 = 2b^2 \end{array} \right. .$$

Но $7^{2n} - 7^n + 1$ е нечетно, следователно втората възможност отпада. За всяко $n \geq 1$ имаме, че $7^{2n} - 7^n + 1$ е заключено между два последователни квадрата:

$$(7^n - 1)^2 < 7^{2n} - 7^n + 1 < (7^n)^2$$

и значи и тази възможност отпада при $n \geq 1$. Задачата е решена.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за разлагането $2(343^n + 1) = 2(7^n + 1)(7^{2n} - 7^n + 1)$; 2 т. за дозаване на $(7^n + 1, 7^{2n} - 7^n + 1) = 1$; 1 т. за отхвърляне на $7^{2n} - 7^n + 1 = 2b^2$; 2 т. за отхвърляне на $7^{2n} - 7^n + 1 = b^2$ при $n \geq 1$; 1 т. за отговор.

Задача 9.4. В една компютърна мрежа има 27 устройства. Всяко от тях има уникален n -цифрен номер, съставен само от нули и единици. Номерата на устройствата, които трябва да комуникират помежду си, се различават в точно 3 позиции, а номерата на тези, които не трябва да комуникират помежду си, се различават в точно 6 позиции. Ако поне две от устройствата комуникират помежду си, да се намерят всички възможни стойности за n .

Отговор. $n \geq 78$.

Решение. С $d(x, y)$ ще означаваме броят на позициите, в които се различават два номера. Ще казваме, че x и y са на разстояние $d(x, y)$

Нека разгледаме устройството S , което си комуникира с най-много устройства измежду останалите. Ще го наричаме сървър и ще докажем, че всички останали устройства си комуникират с него. Без ограничение на общността, можем да предположим, че номера на сървъра е 0000...0. Да разгледаме две произволни други устройства A и B . Нека A е на разстояние $d(A, S) = a$ от сървъра, а B - на разстояние $d(B, S) = b$ от сървъра. Тъй като номерът на сървъра има само нули, то A ще има в номера си a 1-ци, а B - b .

Да пресметнем $d(A, B)$. Нека A и B имат 1-ци на k общи позиции. Тогава ще има $a - k$ позиции, в които A ще има 1, а B 0 и $b - k$ позиции, в които A ще има 0, а B 1. Така разстоянието между тях ще бъде $d(A, B) = a - k + b - k = a + b - 2k$. В нашия конкретен случай a , b и $a + b - 2k$ са или 3, или 6. Използвайки единствено четност, директно се проверява, че

I. $a = b = 3 \Rightarrow k = 0$; II. $a = 3, b = 6 \Rightarrow k = 3$; III. $a = b = 6 \Rightarrow k = 3$.

С други думи, всяко устройство, което не си комуникира със сървър, трябва да си комуникира с всички устройства, които си комуникират със сървър и не трябва да си комуникира с останалите, а всеки две устройства, които си комуникират със сървър не си комуникират помежду си.

Съгласно условието и екстремалния избор на S , съществува поне едно устройство A , което си комуникира със сървър (т.е., $a = 3$). Ако допуснем, че съществува устройство B , което не си комуникира със сървър (т.е., $b = 6$), то то трябва да си комуникира с A и значи има единици на всички позиции, на които A има единици. Тъй като никои две устройства, комуникиращи си със сървър не си комуникират помежду си, заключаваме че в този случай сървър си комуникира с най-много две други устройства. Но тогава останалите поне 24 устройства не си комуникират с S и значи си комуникират с A – противоречие с избора на S да е устройството с най-много комуникации.

Следователно всички останали 26 устройства си комуникират с S , имат по 3 единици в номерата си и няма два номера с единица на една и съща позиция, т.е., $n \geq 26 \cdot 3 = 78$. Обратно, пример за $n = 78$ се конструира лесно: сървър S свързан с 26 устройства A_i , като номера на A_i съдържа единици на позиции $\{3i - 2, 3i - 1, 3i\}$, $i = 1, 2, \dots, 26$. Очевидно за всяко число по-голямо от 78 можем да конструираме примери, като просто “залепваме” необходимия брой нули към всички номера в края на записа им.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за откриване, че има само три възможности I, II, III за броя на единиците в номерата; 4 т. за доказателство на единствената възможна конструкция: сървър + 26 устройства, комуникиращи си само с него; 1 точка за отговор с пример.

Коментар: $d(x, y)$ се нарича Хемингово разстояние и намира приложение в различни области на дискретната математика. Числата 3 и 6 не са съществени, подобен аргумент може да се прави за произволно $2\ell + 1$ и $4\ell + 2$.

Задача 10.1. Да се реши уравнението

$$8 - 3\sqrt{x^2 + 16} = \frac{56}{2 - \sqrt{x^2 + 16}}.$$

Решение. Нека $u = 2 - \sqrt{x^2 + 16}$. Тогава $u \leq 2 - 4 < 0$, а лявата страна е $2 + 3u$, следователно можем да умножим по u и да получим

$$3u^2 + 2u - 56 = 0.$$

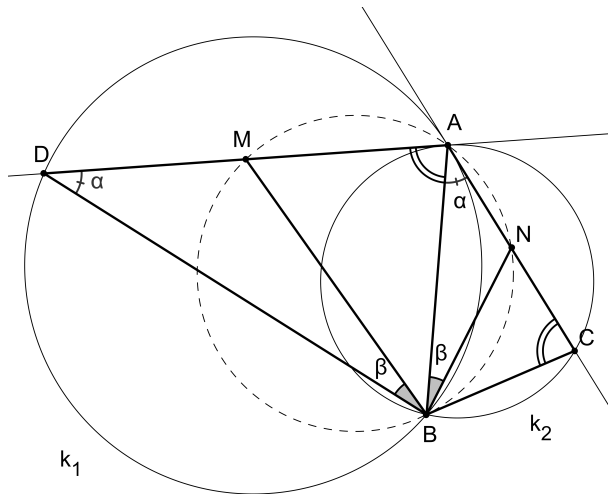
Решенията на това квадратно уравнение са $-14/3$ и 4 , но $u < 0$, следователно $u = 4$ няма решение. Уравнението $u = -14/3$ е еквивалентно на

$$\sqrt{x^2 + 16} = \frac{20}{3},$$

т.е. след вдигане на квадрат (двете страни са положителни), получаваме $x^2 = (400 - 16 \cdot 9)/9$, или $x^2 = 256/9$, т.е. $x = \pm 16/3$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за полагането за u ; 1 т. за опростяване; 1 т. за решаване на квадратното уравнение за u ; 1 т. за изключване на $u = 4$; 2 т. за довършване;

Задача 10.2. Две окръжности k_1 и k_2 се пресичат в точки A и B . Допирателната в точка A към k_1 пресича k_2 за втори път в точка C , а допирателната в точка A към k_2 пресича k_1 за втори път в точка D . Точка M лежи върху отсечката AD , а точка N лежи върху отсечката AC . Ако $BD = 32$, $BC = 18$, $DM = 20$ и $AN = 15$, да се докаже, че четириъгълник $BNAM$ е вписан.



Фигура 1: Чертеж към задача 10.2.

Решение. Точките C и D се намират в различни полуравнини спрямо правата AB , следователно същото важи и за точките N и M . Така, че AB е вътрешен диагонал за четириъгълник $BNAM$ и е достатъчно да докажем, че $\angle BMA + \angle BNA = 180^\circ$.

За окръжност k_1 имаме, че $\angle BDA = \angle BAC$, съответно като вписан и периферен за една и съща дъга. Аналогично, за окръжност k_2 имаме, че $\angle BCA = \angle BAD$. Оттук, $\triangle BAD \sim \triangle BCA$ (I пр.) и

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \implies AB = \sqrt{BC \cdot BD} = \sqrt{18 \cdot 32} = 24.$$

Ако означим коефициентът на подобие между триъгълниците с r , то имаме че

$$r^2 = (AB/BC)(BD/AB) = BD/BC = 32/18 = 16/9.$$

Следователно $r = 4/3$. Забелязваме, че $DM/AN = 20/15 = 4/3 = r = DB/AB$ и значи $\triangle BMD \sim \triangle BNA$ (II пр.). Така,

$$\angle BMA = 180^\circ - \angle BMD = 180^\circ - \angle BNA \implies \angle BMA + \angle BNA = 180^\circ,$$

откъдето и четириъгълник $BNAM$ е вписан.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $\triangle BAD \sim \triangle BCA$; 1 т. за пресмятане на коефициента на подобие $r = 4/3$; 1 т. за $DM/AN = r$; 3 т. за $\triangle BMD \sim \triangle BNA$; 1 т. за довършване.

Задача 10.3. Да се намери най-малкото естествено число n , за което съществуват n прави в равнината, никои три от които не се пресичат в една точка такива, че

(i) Броят различни пресечни точки между правите е 23;

(ii) Броят различни триъгълници, образувани чрез правите е 14.

Решение. Нека разделим правите в k “снопи”, като в един сноп всички прави са успоредни помежду си. Нека означим с n_i броят прави в i -тия сноп, $i = 1, \dots, k$. Ако приемем, че $\binom{1}{2} = 0$, то можем да разглеждаме и снопове, съставени от една единствена права и ще имаме връзката

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n, \quad n_i \geq 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Без ограничение на общността, $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$.

Първи начин. Броят P различни пресечни точки между правите е точно

$$P = \binom{n}{2} - \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{2}.$$

Оттук, необходимо условие е $\binom{n}{2} \geq 23$, откъдето $n \geq 8$.

Да допуснем, че $n = 8$. Тогава,

$$\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \dots + \binom{n_k}{2} = \binom{8}{2} - 23 = 5; \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = 8.$$

Тъй като $\binom{2}{2} = 1$, $\binom{3}{2} = 3$, $\binom{4}{2} = 6 > 5$, получаваме че $n_i \leq 3$, $\forall i$. Ако допуснем, че няма сноп от три прави, то тогава са ни необходими 5 снопа от по 2 прави, т.е., поне 10 прави, което е противоречие. От друга страна $3 + 3 = 6 > 5$ и няма как да има повече от един сноп от три прави, откъдето заключаваме, че единствената възможност е да имаме точно един сноп от 3 прави. Оттук следва, че имаме и два снопа по две прави, а единствената останала права образува последния четвърти сноп, т.е., $\{n_1, n_2, n_3, n_4\} = \{3, 2, 2, 1\}$. Нека сега преброим колко триъгълника се образуват в тази конфигурация. Всеки триъгълник се генерира от 3 прави от различни снопи и значи, общия брой триъгълници е

$$T = 3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 = 28 \neq 14. \quad \implies \quad n \neq 8.$$

Да допуснем, че $n = 9$. Тогава,

$$\binom{n_1}{2} + \binom{n_2}{2} + \dots + \binom{n_k}{2} = \binom{9}{2} - 23 = 13; \quad n_1 + n_2 + \dots + n_k = 9.$$

С аналогични на горните разсъждения, получаваме, че $n_i \leq 5$, $\forall i$. Отново, ако няма сноп от 5 прави, то ни трябва поне 2 снопа от четири и още един от две, т.е., поне 10 прави, което е противоречие. С разглеждане на случаи, лесно се съобразява, че единствената възможност е $\{n_1, n_2, n_3\} = \{5, 3, 1\}$, за която имаме $5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ различни триъгълника. Но $15 \neq 14$, следователно $n \neq 9$.

Аналогично, при $n = 10$ получаваме, че единствената възможна конфигурация на 10 прави в равнината с точно 23 различни пресечни точки е $\{n_1, n_2, n_3\} = \{7, 2, 1\}$, за която имаме $7 \cdot 2 \cdot 1 = 14$ различни триъгълника. Следователно, решението на задачата е $n = 10$. Не е трудно да се съобрази, че това е единственото n , за което задачата има решение.

Втори начин. Задачата може да се атакува и с оценка на броя снопи k . От формулите

$$23 = P = \sum_{i \neq j} n_i n_j, \quad 14 = T = \sum_{i \neq j \neq \ell} n_i n_j n_\ell,$$

използвайки, че $n_i n_j n_\ell \geq 1$, получаваме че $\binom{k}{3} \leq 14$, откъдето $k \leq 5$.

Ако допуснем, че $k = 5$, то във формулата за T ще имаме $\binom{5}{3} = 10$ събираеми. При $n_2 > 1$, получаваме $n_1 n_2 n_3 \geq n_1 n_2 n_4 \geq n_1 n_2 n_5 \geq 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$, т.е., $T \geq 3 \cdot 4 + 7 = 19 > 14$. Противоречие. Следователно $n_2 = 1$ и значи $P = 4n_1 + 6$, което е четно число и няма как да бъде равно на 23. Противоречие и значи $k \neq 5$.

Ако допуснем, че $k = 4$, то във формулата за T ще имаме $\binom{4}{3} = 4$ събираеми. Аналогично, при $n_3 > 1$ получаваме

$$14 = T = n_1 n_2 n_3 + n_1 n_2 n_4 + n_1 n_3 n_4 + n_2 n_3 n_4 \geq 8 + 3 \cdot 4 = 20 \quad \implies \text{противоречие!}$$

Ако $n_2 = 1$, то $P = 3n_1 + 3$. Но $3 \nmid 23$, следователно и това също е невъзможно. Но тогава $n_1 n_2 \geq n_1 + n_2$ и

$$14 = T = 2n_1 n_2 + n_1 + n_2 \geq n_1 n_2 + 2n_1 + 2n_2 = P - 1 = 22 \quad \implies \text{противоречие!}$$

Следователно $k = 3$.

Тъй като $14 = 7 \cdot 2 \cdot 1$, то единствените възможности са $\{n_1, n_2, n_3\} = \{14, 1, 1\}$ или $\{n_1, n_2, n_3\} = \{7, 2, 1\}$. В първия случай имаме $P = 2 \cdot 14 + 1 = 29 \neq 23$, а във втория $P = 7 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 23$, което води и до единствената работеща конфигурация. Оттук и единственото n , което удовлетворява условието е $n = 7 + 2 + 1 = 10$.

Оценяване. (7 точки) Първи начин: 2 т. за обоснован пример при $n = 10$; 1 т. за $n \geq 8$; по 2 т. за $n \neq 8, 9$. Втори начин: 2 т. за обоснован пример при $k = 3$ и оценката $n \leq 10$; 1 т. за $k \leq 5$; по 2 т. за $k \neq 5, 4$.

Задача 10.4. Нека $n \geq 4$ е естествено число. Да се намерят всички цели числа a , за които полиномът

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + 63$$

може да се напише като произведение $p(x)q(x)$ на два полинома $p(x), q(x)$ с цели коефициенти, всеки от които е от степен поне единица.

Решение. Нека p, q имат степен k и $\ell := n - k$ съответно. Техните старши коефициенти трябва да бъдат цели числа с произведение едно, и БОО може да допуснем, че старшите коефициенти са 1. Нека $p(x) = x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$, $q(x) = x^\ell + b_1x^{\ell-1} + \dots + b_\ell$, където всички коефициенти са цели числа.

Знаем, че $a_kb_\ell = 63$, така че БОО $7 \mid a_k$ и $7 \nmid b_\ell$. Ако погледнем коефициента на x^1 , получаваме $0 = a_kb_{\ell-1} + a_{k-1}b_\ell$, следователно $7 \mid a_{k-1}b_\ell$, но $7 \nmid b_\ell$, тоест $7 \mid a_{k-1}$. Повтаряйки този процес получаваме по индукция $7 \mid a_{k-2}, \dots, 7 \mid a_1$ ($7 \mid a_1$ се получава от коефициента на x^{k-1} , а $k-1 < n-1-1$, тоест коефициентът на $f(x)$ е нула). Ако допуснем, че $k < n-1$, сравнявайки коефициентите пред x^k получаваме

$$0 = b_\ell + b_{\ell-1}a_1 + \dots,$$

което дава противоречие по модул 7. Следователно $k = n-1$, тоест q е от степен едно: $q(x) = x + b_1$. Възможните стойности за b_1 са $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Ако

$$f(x) = x^n + ax^{n-1} + 63 = p(x)(x + b_1),$$

то трябва $f(-b_1) = 0$. Ако $b_1 = \pm 9$ или ± 3 , получаваме, че $3^{n-1} \geq 27 \mid 63$, което е противоречие. Ако $b_1 = -1$, то $0 = f(1) = 1 + a + 63$, т.е., $a = -64$, а ако $b_1 = 1$, то

$$f(-1) = (-1)^{n-1}(-1 + a) + 63 = 0,$$

тоест при n четно $a - 1 = 63$, $a = 64$, а при n нечетно, $a - 1 = -63$, $a = -62$.

Окончателно, ако n е четно, $a = \pm 64$, а ако n е нечетно, $a \in \{-64, -62\}$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за $7 \mid a_{k-1}, \dots, 7 \mid a_1, 7 \mid a_k$; 1 т. за $\ell = 1$; 2 т. за изключване на случаите $b_1 = \pm 3, \pm 9$; 1 т. за довършване. Ако няма други точки по задачата: 1 т. за използване на критерий на Айзенщайн, за да се покаже, че $7 \nmid a$.

Задача 11.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението

$$4^{x^2-x} - (1-a)2^{x^2-x} - 6a^2 + 2a = 0$$

има единствено решение в интервала $[-1; 0)$.

Решение. Нека $f(x) = x^2 - x$. Тъй като $f(x) = x^2 - x$ е намаляваща в интервала $[-1; 0)$, то $0 < f(x) \leq 2$ за всяко $x \in [-1; 0)$. Показателната функция $g(u) = 2^u$ е растяща и получаваме, че $2^0 < 2^{x^2-x} \leq 2^2$, т. е. че $1 < 2^{x^2-x} \leq 4$ за всяко $x \in [-1; 0)$. Така задачата се свежда до намиране на онези стойности на параметър a , за които уравнението

$$t^2 - (1-a)t - 6a^2 + 2a = 0$$

има единствено решение в интервала $(1; 4]$. Корените на това уравнение са $t_1 = 2a$ и $t_2 = 1 - 3a$. Тогава имаме следните случаи

1. $t_1 \leq 1 < t_2 \leq 4$; **2.** $t_2 \leq 1 < t_1 \leq 4$; **3.** $1 < t_1 \leq 4 < t_2$; **4.** $1 < t_2 \leq 4 < t_1$; **5.** $1 < t_1 = t_2 \leq 4$.

За всеки от тези случаи получаваме:

$$1. 2a \leq 1 < 1 - 3a \leq 4; \quad 2. 1 - 3a \leq 1 < 2a \leq 4; \quad 3. 1 < 2a \leq 4 < 1 - 3a;$$

$$4. 1 < 1 - 3a \leq 4 < 2a; \quad 5. 1 < 2a = 1 - 3a \leq 4.$$

В първите два случая решенията са съответно $a \in [-1; 0)$ и $a \in (\frac{1}{2}; 2]$, а случаите 3), 4), и 5) нямат решение. Окончателно търсените стойности на параметъра са $a \in [-1; 0) \cup (\frac{1}{2}; 2]$.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за извода, че точно един от корените на $t^2 - (1-a)t - 6a^2 + 2a = 0$ е в интервала $(1; 4]$; 2 т. за намиране на $t_1 = 2a$ и $t_2 = 1 - 3a$ и записване на петте случая; 2 т. за решаване на получените 5 системи и 1 т. за окончателния отговор.

Задача 11.2. Ъглополовящата AD в $\triangle ABC$ е равна на страната AC . Описаната около $\triangle ABD$ окръжност пресича страната AC в точка E като $\frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Да се намерят ъглите на $\triangle ABC$.

Решение. Нека $\angle BAC = \alpha$. От свойството на ъглополовящата $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Но $BD = DE$ като хорди в окръжност, на които отговарят равни дъги, откъдето $AB = \frac{\sqrt{3}+1}{2}AC$. Ако $BD = DE = x$, то $CD = \frac{2x}{1+\sqrt{3}}$ и от формулата за ъглополовящата, при $AD = AC$ намираме

$$AD^2 = AB \cdot AD - BD \cdot DC = 2x^2,$$

т. е. $AD = x\sqrt{2}$. От косинусова теорема за $\triangle ABD$ спрямо страната BD получаваме

$$x^2 = x^2 \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + (x\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} x^2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Оттук $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\alpha = 60^\circ$. От равнобедрения триъгълник $\triangle ACD$ намираме $\angle DCA = \angle CDA = 75^\circ$ и тогава $\angle ABC = 45^\circ$. Окончателно ъглите на $\triangle ABC$ са $60^\circ, 45^\circ$ и 75° .

Оценяване. (7 точки) 4 т. за изразяване на AD чрез BD , 2 т. за намиране на $\alpha = 60^\circ$ и 1 т. за другите два ъгъла.

Задача 11.3. Да се докаже, че за произволно цяло число c съществува естествено число x , за което 2^{2023} дели $2022x^2 + 2021x + c$.

Решение. С индукция по n ще докажем, че за всяко n съществува x , за което 2^n дели $f(x) = 2022x^2 + 2021x + c$. При $n = 1$ можем да изберем $x = |c|$.

Нека 2^n дели $f(x_n) = 2022x_n^2 + 2021x_n + c$. Ако 2^{n+1} дели $f(x_n)$, то избираме $x_{n+1} = x_n$. В противен случай имаме $2022x_n^2 + 2021x_n + c = 2^n \cdot m$, където m е нечетно число. Избираме $x_{n+1} = x_n + 2^n$ и получаваме:

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= 2022x_{n+1}^2 + 2021x_{n+1} + c = \\ &= 2022x_n^2 + 2021x_n + c + 2022 \cdot 2^{n+1}x_n + 2022 \cdot 2^{2n} + 2021 \cdot 2^n = \\ &= 2^{n+1}S + 2^n(m + 2021). \end{aligned}$$

Тъй като $m+2021$ е четно число, то $f(x_{n+1})$ се дели на 2^{n+1} , с което индукцията е завършена.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за идея за индукция за доказване на твърдението в общия случай; 3 т. за вярно изразяване на x_{n+1} чрез x_n ; 3 т. за довършване на индукцията.

Задача 11.4. Да се намерят всички естествени числа n , за които от група от $2n$ ученици могат да се изберат 14 групи, всяка от по n ученици, така, че всеки двама ученици да участват заедно в точно 3 от избраните групи.

Решение. Всички двойки ученици са $\binom{2n}{2}$, а във всяка група се срещат точно $\binom{n}{2}$ двойки. От условието сега следва, че

$$3\binom{2n}{2} = 14\binom{n}{2} \iff 6n(2n-1) = 14n(n-1) \Rightarrow n = 4.$$

Следователно от 8 ученици трябва да образуваме 14 групи от по 4 ученика всяка, така че всеки двама ученици да се срещат в точно три групи. Пример за такова разпределение е следния:

$$(1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), (1, 2, 5, 6), (3, 4, 7, 8), (1, 2, 7, 8), (3, 4, 5, 6), (1, 3, 5, 7), \\ (2, 4, 6, 8), (1, 3, 6, 8), (2, 4, 5, 7), (1, 4, 5, 8), (2, 3, 6, 7), (1, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 8)$$

Оценяване. (7 точки) 3 т. за намиране на $n = 4$; 4 т. за примера.

Задача 12.1. Да се реши неравенството:

$$\sqrt{3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1} \geq 3^{x+1} - 5.$$

Решение. Нека да означим $y = 3^x$ (можем да отбележим допълнително, че $y > 0$). Тогава даденото неравенство добива вида $\sqrt{3y^2 - 4y + 1} \geq 3y - 5$ (*).

Неравенството (*) на променливата y има смисъл при $3y^2 - 4y + 1 \geq 0$, т.е. при $y \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[1, +\infty\right)$ (или $y \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[1, +\infty\right)$, ако отчетем $y > 0$).

Сега ще разгледаме два основни случая.

I случай. Нека $3y - 5 < 0$, т.е. $y \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[1, \frac{5}{3}\right)$ (или $y \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[1, \frac{5}{3}\right)$, при $y > 0$). Сега неравенството (*) е изпълнено, понеже лявата му страна е неотрицателна, а дясната е по-малка от нула. Следователно в този случай решенията са $y \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[1, \frac{5}{3}\right)$ (или $y \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[1, \frac{5}{3}\right)$).

II случай. Нека $3y - 5 \geq 0$, т.е. $y \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$. В този случай двете страни на неравенството (*) са неотрицателни и след повдигане на квадрат ще получим еквивалентното неравенство $3y^2 - 4y + 1 \geq 9y^2 - 30y + 25$ или $3y^2 - 13y + 12 \leq 0$, т.е. $y \in \left[\frac{4}{3}, 3\right]$. След пресичане с интервала $\left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$ получаваме, че в този случай решения на неравенството (*) са $y \in \left[\frac{5}{3}, 3\right]$.

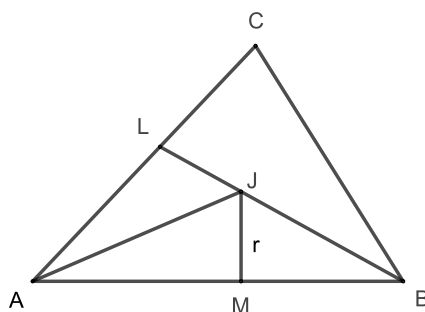
Така за решенията на (*) окончателно получаваме $y \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup [1, 3]$ (или $y \in \left(0, \frac{1}{3}\right] \cup [1, 3]$, при $y > 0$).

След връщане към променливата x имаме $3^x \leq \frac{1}{3} = 3^{-1} \cup 3^0 = 1 \leq 3^x \leq 3 = 3^1$, което поради факта, че функцията 3^x е растяща ни води до $x \leq -1 \cup 0 \leq x \leq 1$.

Така окончателно получаваме, че решения на даденото показателно ирационално неравенство са $x \in \left(-\infty, -1\right] \cup [0, 1]$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за въвеждане на ново неизвестно y и свеждане до ирационалното неравенство (*); 1т. за намиране на дефиниционното множество на (*); 1 т. за разглеждане на случая $3y - 5 < 0$; 1 т. за разглеждане на случая $3y - 5 \geq 0$; 1 т. за достигане до решенията на (*); 2 т. за връщане към променливата x и окончателен отговор.

Задача 12.2. Даден е триъгълник ABC , за който ъглополовящата на средния по големина ъгъл е равна на най-малката му страна и числата $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$, взети в този ред, образуват аритметична прогресия. Да се намерят отношението, в което центърът на вписаната окръжност J разделя тази ъглополовяща, радиусът r на тази окръжност и дължините на страните на триъгълника, при условие че лицето му S е равно на $21\sqrt{15}$.



Фигура 2: Чертеж към задача 12.2.

Решение. Понеже числата $a = BC$, $b = CA$ и $c = AB$ в този ред образуват аритметична

прогресия, то $a + c = 2b$ и без ограничение на общността можем да считаме, че $a \leq b \leq c$. В триъгълника срещу по-голям ъгъл лежи по-голяма страна и обратно, т.е. конструкцията ще бъде както е показано на чертежа и $BL = BC = a$.

От свойството на ъглополовящите за триъгълника ABC непосредствено получаваме $m = AL = c \frac{b}{a+c} = \frac{c}{2}$ и $n = CL = a \frac{b}{a+c} = \frac{a}{2}$. Сега понеже AJ е ъглополовяща в триъгълника ABL , то $\frac{1}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{c} = \frac{AL}{AB} = \frac{LJ}{BJ}$, т.е. $BJ : JL = 2 : 1$.

Нека с p да означим полупериметъра на $\triangle ABC$, т.е. $p = \frac{a+b+c}{2}$. От равенството $a+c = 2b$ получаваме $b = \frac{2}{3} p$ и $a+c = \frac{4}{3} p$.

Сега от $BL = a$, $m = AL = \frac{c}{2}$, $n = CL = \frac{a}{2}$ и формулата за ъглополовящата в $\triangle ABC$ имаме $a^2 = BL^2 = c \cdot a - m \cdot n = \frac{3}{4} ac$, т.е. $a = \frac{3}{4} c$.

Така от равенствата $a = \frac{3}{4} c$ и $a+c = \frac{4}{3} p$ непосредствено получаваме $a = \frac{12}{21} p$, $b = \frac{2}{3} p$ и $c = \frac{16}{21} p$. Сега от свойствата на допирателна от външна точка към окръжност имаме

$BM = p - b = \frac{p}{3}$, а от $BJ : JL = 2 : 1$ и $BL = a$ достигаме до $BJ = \frac{2}{3} a = \frac{8}{21} p$.

Тогава в правоъгълния триъгълник BMJ теоремата на Питагор ни дава $BJ^2 = BM^2 + JM^2$, $\left(\frac{8}{21} p\right)^2 = \left(\frac{p}{3}\right)^2 + r^2$ или $\frac{8^2 - 7^2}{21^2} p^2 = r^2$, т.е. $r^2 = \frac{15}{21^2} p^2$.

Сега от формулата за лице $S = pr = 21\sqrt{15}$ след повдигане на квадрат достигаме до $S^2 = p^2 r^2 = 21^2 \cdot 15$ и след заместване на $r^2 = \frac{15}{21^2} p^2$ имаме $p^2 \frac{15}{21^2} p^2 = 21^2 \cdot 15$, т.е. $p = 21$.

Така окончателно получаваме $r = \sqrt{15}$, $a = 12$, $b = 14$ и $c = 16$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за обосновка на $BL = BC = a$; 2 т. за намиране на $BJ : JL = 2 : 1$; 1 т. за достигане до $a = \frac{3}{4} c$; 1 т. за получаване на $a = \frac{12}{21} p$, $b = \frac{2}{3} p$ и $c = \frac{16}{21} p$ (изразяване на страните чрез един параметър); 1 т. за получаване на $r^2 = \frac{15}{21^2} p^2$ (изразяване на радиуса чрез параметъра); 1 т. за намиране на $p = 21$ (параметъра) и окончателен отговор.

Задача 12.3. Естествено число n ще наричаме *хубаво*, ако $\text{НОД}((n-1)! + 1, n!) > 1$. Нека a , b и c са три хубави числа. Естествено число N ще наричаме *прекрасно*, ако простите му делители са измежду простите делители на произведението abc .

Да се докаже, че от всеки 8 прекрасни числа или има точен квадрат на естествено число, или могат да се изберат две числа с произведение точен квадрат на естествено число.

Решение. Първо ще докажем, че хубавите числа са всички прости числа. Ако $\text{НОД}((n-1)! + 1, n!) = d > 1$ и n не е просто число, то нека p е прост делител на d . Тъй като n не е просто число, то $p < n$. Тогава p дели $n!$ и $(n-1)!$, т.е. p дели 1, противоречие.

Обратно, ако n е просто число, то от теоремата на Уилсън следва, че $(n-1)! + 1$ се дели на n и тогава n дели $\text{НОД}((n-1)! + 1, n!)$, т.е. $\text{НОД}((n-1)! + 1, n!) > 1$.

Трябва да докажем, че от всеки 8 числа от вида $p^\alpha \cdot q^\beta \cdot r^\gamma$, където p, q и r са прости числа, или има точен квадрат на естествено число, или могат да се изберат две числа с произведение точен квадрат на естествено число. Имаме 8 възможности за остатъците на тройка (α, β, γ) по модул 2. Ако няма точен квадрат, от принципа на Дирихле за 8-те числа следва, че има две тройки, които съвпадат по модул 2. Тяхното произведение е точен квадрат.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за доказателство, че хубавите числа са простите числа; 2 т. за разглеждане на всевъзможните тройки (α, β, γ) по модул 2; 2 т. за довършване.

Задача 12.4. Дадена е функцията $f(x) = x^3 - 2ax^2 + 3ax$, където a е реален параметър. Да се намерят стойностите на параметъра a , при условие че графиката на $y = f(x)$ има единствена обща точка C с абсцисната ос и $A \neq B$, където с A и B върху тази графика са отбелязани локалните екстремуми. За всяка от тези стойности на параметъра да се докаже, че точките A и B лежат в първи квадрант и лицето на триъгълника ABC е по-малко от 6.

Решение. Функцията $f(x)$ има локални екстремуми в две различни точки точно когато производната ѝ $f'(x) = 3x^2 - 4ax + 3a$, която е квадратен тричлен, има два различни реални корена, което е еквивалентно с дискриминантата на $f'(x) = 0$ да бъде строго положителна, т.е. $D_{f'} = 16a^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3a > 0$ или $a \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

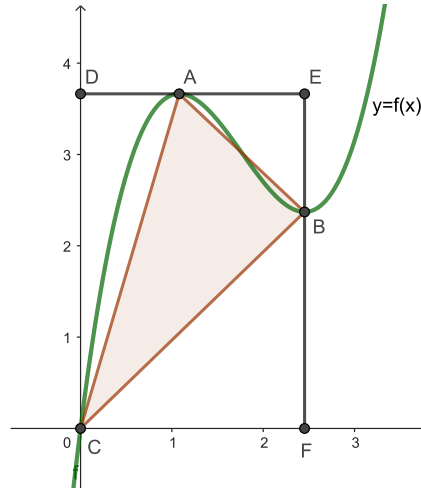
Нека при $a \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{9}{4}, +\infty\right)$ да означим корените на квадратния тричлен $f'(x) = 3x^2 - 4ax + 3a = 0$ съответно с x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), тогава от формулите на Виет имаме $x_1 + x_2 = \frac{4a}{3}$ и $x_1 \cdot x_2 = a$.

Функцията $f(x)$ расте ($f'(x) > 0$) за $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ и намалява ($f'(x) < 0$) за $x \in (x_1, x_2)$, т.е. в точката $A(x_1, f(x_1))$ тя има локален максимум, а в точката $B(x_2, f(x_2))$ – локален минимум.

Пресечните точки на графиката на функцията $y = f(x)$ с оста Ox (правата с уравнение $y = 0$) имат абсциси, които са решения на уравнението $f(x) = x(x^2 - 2ax + 3a) = 0$. Понеже за всяка стойност на параметъра a имаме $f(0) = 0$, то точката $C(0, 0)$ ще бъде пресечна точка на графиката на функцията с оста Ox . Така графиката на $f(x)$ ще има единствена обща точка с абсцисната ос точно когато квадратният тричлен $g(x) = x^2 - 2ax + 3a$ няма реални корени, т.е. когато $D_g = 4a^2 - 4 \cdot 3a < 0$ или $a \in (0, 3)$.

Така стойностите на параметъра a , за които $f(x)$ има два локални екстремума и една пресечна точка с абсцисната ос са $a \in \left(\left((-\infty, 0) \cup \left(\frac{9}{4}, +\infty\right)\right) \cap (0, 3)\right)$ или $a \in \left(\frac{9}{4}, 3\right)$.

Понеже за $a \in \left(\frac{9}{4}, 3\right)$ имаме $x_1 + x_2 = \frac{4a}{3} > 0$ и $x_1 \cdot x_2 = a > 0$, то числата x_1 и x_2 са положителни.



Фигура 3: Чертеж към задача 4.

От $f(0) = 0$, $x_1 > 0$ и факта, че функцията $f(x)$ расте за $x \in (-\infty, x_1)$ имаме $f(x_1) > 0 = f(0)$. Ако стойността на локалния минимум $f(x_2)$ не е положителна, то от теоремата на Болцано ще получим, че графиката на $f(x)$ ще има повече от една обща точка с оста Ox , което не е вярно.

Следователно x_1 и x_2 са положителни и $f(x_1) > f(x_2) > 0$, т.е. точките на локален екстремум $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$ лежат в първи квадрант.

Да разгледаме квадратния тричлен $f'(x) = 3x^2 - 4ax + 3a = 0$ за $a \in \left(\frac{9}{4}, 3\right)$. Понеже старшият му коефициент е положителен и са изпълнени неравенствата $f'(1) = 3 - a > 0$ и $1 < \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2a}{3}$, то имаме $1 < x_1 < x_2$. Освен това $1 < x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2a}{3} < 2$, т.е. $1 < x_1 < 2$.

Да намерим най-голямата стойност на квадратния тричлен $h(t) = g(t) - 4 = t^2 - 2at + 3a - 4$ за $t \in [1, 2]$. Понеже върхът на параболата е в точката $t_0 = a > 2$, то за $t \in [1, 2]$ функцията $h(t)$ ще намалява и ще достига най-голямата си стойност в левия край на интервала, т.е. $h(t) \leq h(1) = a - 3 < 0$ или $g(t) < 4$ за всяко $t \in [1, 2]$.

Сега ще изразим лицето на триъгълника ABC по следния начин (вж. чертежа):

$$S_{ABC} = S_{CFED} - S_{CFB} - S_{CAD} - S_{ABE} = x_2 f(x_1) - \frac{x_2 f(x_2)}{2} - \frac{x_1 f(x_1)}{2} - \frac{(x_2 - x_1)(f(x_1) - f(x_2))}{2}.$$

Непосредствено се проверява, че неравенството $S_{ABC} < \frac{1}{2}S_{CFED} = \frac{x_2 f(x_1)}{2}$ е изпълнено. (Действително след разкриване на скобите и опростяване то става еквивалентно на неравенството $\frac{x_1 f(x_2)}{2} > 0$, което очевидно е вярно.)

Така окончателно получаваме $S_{ABC} < \frac{x_2 f(x_1)}{2} = \frac{x_2 x_1 g(x_1)}{2} = \frac{a \cdot g(x_1)}{2} < 6$, понеже $a < 3$ и $g(x_1) < 4$ ($x_1 \in (1, 2)$).

Оценяване. (7 точки) 2 т. за достигане до $a \in \left(\frac{9}{4}, 3\right)$ (по 1 т. за $A \neq B$ и съществуване на единствена пресечна точка C); 1 т. за доказване, че $A(x_1, f(x_1))$ и $B(x_2, f(x_2))$ лежат в първи квадрант; 1 т. за достигане до $1 < x_1 < 2$; 1 т. за доказване, че $g(t) < 4$ за всяко $t \in [1, 2]$; 1 т. за доказване на неравенството $S_{ABC} < \frac{1}{2}S_{CFED} = \frac{x_2 f(x_1)}{2}$; 1 т. за получаване на $S_{ABC} < 6$.

Забележка. Стойностите на параметъра, за които графиката на $y = f(x)$ има единствена обща точка с абсцисната ос могат да бъдат намерени и от условието $G(x_1, x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$. Трябва да отбележим, че това условие е симетрично, относно x_1 и x_2 , т.е. може да се изрази чрез $x_1 + x_2 = \frac{4a}{3}$ и $x_1 \cdot x_2 = a$. ($0 < G(x_1, x_2) = G(x_2, x_1) = H(x_1 + x_2, x_1 x_2) = x_1 x_2 (x_1^2 x_2^2 - 2a x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 3a(x_1^2 + x_2^2) + 4a^2 x_1 x_2 + 9a^2 - 6a^2(x_1 + x_2) = W(a) = 4a^3 \left(1 - \frac{a}{3}\right)$). Полученото условие е еквивалентно на $a \in (0, 3)$.

Задачите са предложени от: 8.1, 8.4 – Ивайло Кортезов; 8.2, 8.3 – Мирослав Маринов; 9.1, 9.4 – Константин Делчев; 9.3 – Иван Ангелов; 10.1, 10.4 – Милен Иванов; 10.3 – Станислав Харизанов; 11.1, 11.2 – Аделина Чопанова; 9.2, 11.3, 11.4, 12.3 – Емил Колев; 10.2, 12.1, 12.2, 12.4 – Веселин Гушев.