LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

11. клас

1. В стая, в която температурата на въздуха била 0°C, включили радиатор и температурата започнала постепенно да се повишава. След един час термометърът показвал 5°C, а в края на третия час температурата в стаята била 10°C. Ако с t_n е означен ръстът на температурата през n-тия час от включването на радиатора, за всяко $n \geq 2$ е в сила, че $\dfrac{t_n}{t_{n-1}} = q$, където q е положително реално число.

а) Намерете q. **3 точки**

б) Докажете, че през петия час температурата в стаята се е покачила с по-малко от 1 градус и в края на петия час термометърът е показвал по-малко от 12°C. **4 точки**

2. Дадена е аритметичната прогресия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$

а) Ако $a_3 = 13$ и $a_6 = 4$, намерете за кое n сборът $a_1 + a_2 + ... + a_n$ е най-малък. **3 точки**

б) Разликата на прогресията е равна на 1. Намерете стойностите на a_1, ако за всяко n е изпълнено, че $S_{2012} \leq S_n$. **4 точки**

3. Лицето на триъгълника ABC е равно на $\frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)$, където $BC = a$, $AC = b$.

а) Намерете ъглите на триъгълника. **3 точки**

б) При ротация с център C и ъгъл 30° отсечката AB се изобразява в A_1B_1. Ако $AB = \sqrt{2}$, докажете, че лицето на общата част на триъгълниците ABC и A_1B_1C е равно на $2 - \sqrt{3}$. **4 точки**

LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

12. клас

1. Дадено е уравнението $2^x\left(2^x - a\right)x - 2^x\left(a - 2^x\right) = (a-3)(x+1)$, където a е параметър.

а) Решете уравнението при $a = 3$. **2 точки**

б) Намерете стойностите на параметъра a, за които уравнението има точно две отрицателни решения. **5 точки**

2. Окръжността k е вписана в правоъгълния триъгълник ABC $(\measuredangle C = 90^\circ)$, а окръжността k_1 с радиус, равен на $3\sqrt{2} - 4$, се допира външно до k и до катетите на триъгълника.

а) Намерете радиуса на окръжността k. **3 точки**

б) Ако $\measuredangle BAC = 15^\circ$, докажете, че $AB = 4\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$. **4 точки**

3. Ръбът AD на триъгълната пирамида $ABCD$ е перпендикулярен на основата ABC.

а) Докажете, че ортоцентърът на триъгълника ABC се проектира върху равнината (BCD) в ортоцентъра на триъгълника BCD. **4 точки**

б) Намерете обема на пирамидата, ако $AB = BC = AC = \sqrt{6}$, а ръбът AD сключва с равнината (BCD) ъгъл, чийто косинус е равен на $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3 точки