

Линейна Калманова филтрация. Основни понятия. Моделиране на измерванията. Начални условия.

Филтърът на Калман е рекурсивен филтър, чието предимство е минималното използване на памет за съхранение. Тази страна от филтъра го прави един много полезен инструмент за обработка на GPS данни при приложения на системата в реално време. При такива приложения, изчисленията на филтъра на Калман би следвало да отнемат за обработка време по-малко, от времевия интервал, съдържащ само общия брой измервания. Той е широко използван в инженерните и икономическите приложения: при радарни системи и системи за оценка на параметричен макроикономически модел. Калмановата филтрация се използва при теоретични модели за управление и играе голяма роля при създаване на системи за управление. Съвместно с линейно-квадратичния регулярен филтър, филтъра на Калман разрешава задаване на линейно-квадратично Гаусово управление. Сигналите, които са точно определени или детерминирани се описват от функции в обичайния математически смисъл, така се изчислява времето на протичане на процеса и съответстващата му стойност. Не е трудно да напишем математическата връзка между времето и стойността на функцията. Всичко това е необходимо за да знаем, че съществува съответната функционална връзка. За разлика от детерминираните сигнали, при случайните сигнали винаги има елемент на вероятност, който не може да бъде предвидена. Примери за случайни сигнали са [2]:

$$X(t) = 10\sin(2\pi t + \Theta) \quad (1)$$

, където Θ е случайна променлива равномерно разпределена в интервала 0 до 2π ;

$$X(t) = A\sin(2\pi t + \Theta) \quad (2)$$

, където Θ и A са независими случайни променливи с известно разпределение;

$$X(t) = A \quad (3)$$

представлява шумов сигнал с практически неопределена структура.

Белият шум се определя от случаен стационарен процес, който има постоянна плътност на разпределение. Понякога той се характеризира, като шум, който "подскача" безкрайно далече и безкрайно бързо. Това няма физически смисъл, но е подходяща абстракция. Характерно е че всички физични системи са ограничени до някаква степен и ограничените системи довеждат до процес, който има крайни променливи съдържащи бял шум.

Ако белия шум е с нормално разпределение, резултатът също ще има нормално разпределение и обединяването на входните данни ще бъде линейна операция. Търси се линеен филтър, чиято спектрална характеристика на комбинацията от сигнал и шум, трябва да осигури най-доброто им разделение, т.е. с най-малка средна квадратна грешка. Този тип филтри водят началото си от разработката на Винер от 1940 година и по-късно със създаването на алтернативно решение на същия проблем, чрез филтъра

на Калман в началото на 1960 година [3]. Трябва да се отбележи, че решението на Калман е лесно изпълнимо за величини, които зависят от времето, както и при приложения с голямо количество на входните и изходни данни. Целта на всеки един филтър е да отдели дадена величина от друга, като най - често това се отнася до сигнали със специфичен обхват на честота и не се отнася за сигналите извън дадения обхват. Важен проблем е определянето на метод за намиране на желаната честотна характеристика. В много приложения в комуникациите и контрола, интуитивно трябва да се намери каква трябва да бъде съответната честотната характеристика на сигнала. Крайния резултат от решението на Винер за оптимално филтриране е филтър с коригираща функция в непрекъсната форма, или група от коригиращи фактори съответстващи на дискретния проблем. Всичко това ни показва как миналите стойности на входните данни трябва да коригират, в смисъла да определят, бъдещите стойности на изходните данни, като оптимално оценяване. За съжаление решението на Винер се оказва не толкова добро за по сложни времеви функции и проблеми с многобройни входни и изходни данни. Алтернативен начин за осигуряване на минимална средна квадратна грешка, чрез филтър използващ времеви диференциален метод формулира унгарския учен Р. Е. Калман. Инженерите, особено в сферата на навигацията, бързо осъзнават, че този филтър е решение на много проблеми, които са се обработвали трудно чрез метода на Винер. Двете главни особености на формулировката на Калман за решение на проблем са векторно моделиране на случайни процеси и рекурсивна обработка на измервания натоварени с шум. Ако допуснем, че случайният процес, който ще изчисляваме, може да се моделира по следния начин [4]:

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + w_k \quad (4)$$

Наблюдението (измерването) на процеса се приема, че се случва в дискретни времеви точки в съответствие с линейното отношение:

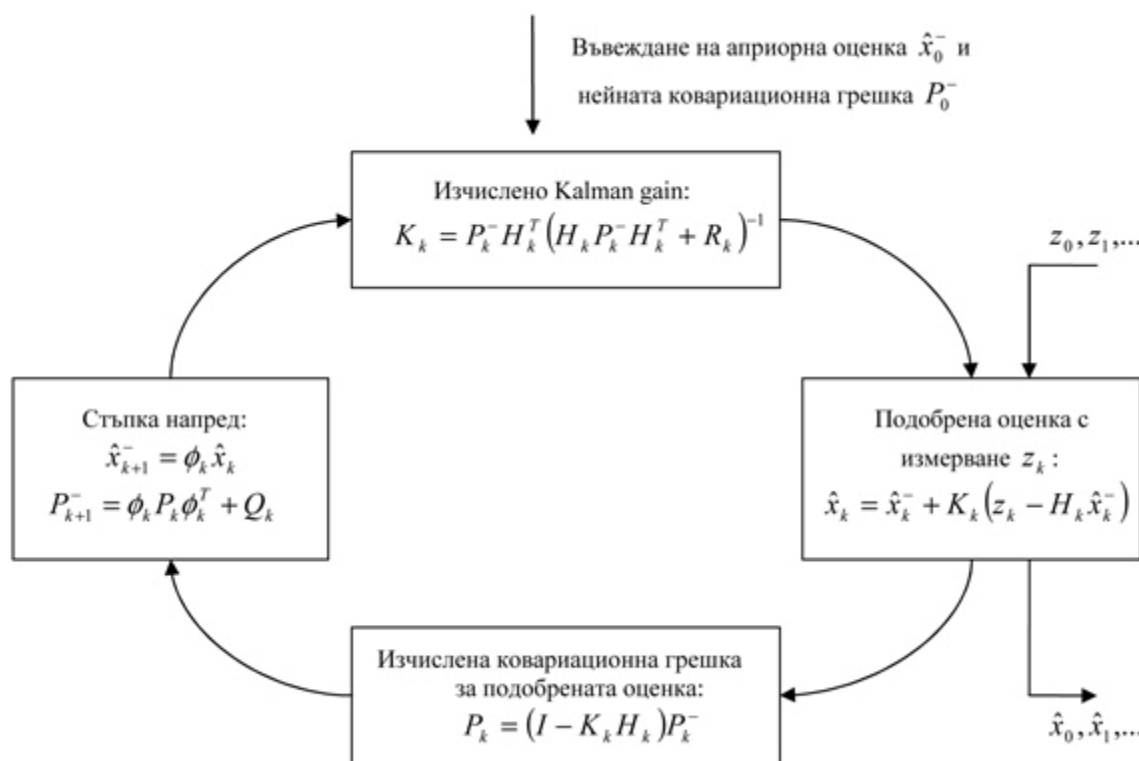
$$z_k = \Phi_k x_k + v_k \quad (5)$$

Уравнения (1) и (2) трябва да отговарят на следните изисквания:

- $x_k (n \times 1)$ е вектор на състояние на процеса по време t_k ;
- $z_k (n \times n)$ е матрица, свързваща x_k към x_{k+1} при отсъствие на подсилваща функция (ако x_k е пример за непрекъснат процес, z_k е матрица на нормалното състояние);
- $w_k (n \times 1)$ представлява вектор, приет да бъде бяла последователност с позната ковариационна структура;
- $H_k (m \times n)$ е матрица на идеалната (освободена от шумове) връзка между измерването и вектора на състоянието във време t_k ;
- $v_k (m \times 1)$ е грешка в измерването - приета да бъде бяла последователност с позната ковариационна структура и нулева крос-корелация с последователност w_k .

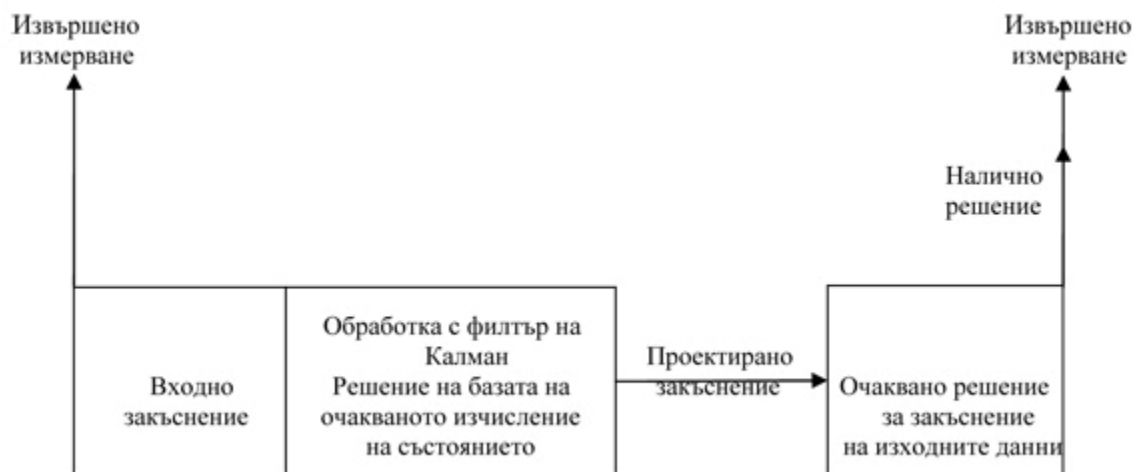
Филтърът на Калман представлява компютърен алгоритъм за процедиране с дискретни измервания (като входни данни) в оптимални оценки (като изходни данни).

Съответните уравнения и последователността от изчислителни стъпки са графично изобразени на фиг.2.



(фиг.2)

При използване на филтъра на Калман за приложения в реално време, изчисленията би следвало да отнемат за обработка време по-малко от времеви интервал, съдържащ общия брой измервания, извършвани от този филтър. При процесите в реално време не може да се очаква обработката на едно решение да се извърши на мястото, където са извършени самите измервания. Винаги има едно крайно времево закъснение, което трябва да се вземе под внимание. За да предоставим едно навременно решение за дадено местоположение, удобен избор е да се проектира решението във времева точка, в която се очаква да се извърши следващо измерване (фиг. 3), защото това изчисление вече съществува като част от нормалния цикъл на Калман филтъра.



(Фиг. 3)

Решението може просто да се извлече от проекцията на вектора на състоянието без необходимостта от проектиране в междинна времева точка. Необходимо време за изпълнение на целия алгоритъм за един цикъл на Калман филтъра може да се получи от броя на събиранията и умноженията, необходими да се приложат матричните уравнения, свързани с него. Начинът, по който дължината на времето съответства на интервала между получаването на измерванията, ще определи приложимостта на процедирането в реално време. Изчислителната ефективност на филтъра, може да се подобри чрез предимствата на матричната разпръснатост или от матричната симетрия, където се появява тази характеристика. За да се обясни разпръснатостта, трябва по-скоро да се напишат извънредно няколко матрични уравнения, касаещи стандартния Калман филтър, отколкото обобщена матрица от алгоритми. В системи, където времевият интервал между измерванията може да варира значително, има поне два начина за определяне на разпространението на вектора на оценката на състоянието x_k и ковариационната матрица на грешката P_k . Единият е да се дефинира базисният интервал между измерванията и да се разпространи последователно, използвайки стойностите на матрицата за пренос на състоянието Φ и ковариацията на шума на процеса Q , изчислена за фиксиран интервал от време Δt . Този подход е подходящ за среда в реално време, където е важно да се поддържа равномерността в изчислителните цикли за целите на последователността. С други думи, дори и да няма никакви измервания за даден цикъл на Калман филтъра, разпространението на оценката на състоянието и ковариацията на грешката ще се осъществят след едно обикновено обновяване с тези, големи количества, без необходимост да се пресмята увеличението. При отсъствие на измервания, оценката на състоянието и ковариацията на грешката просто се разпространяват многократно. Но това непрекъснато разпространение, ако се осъществява през голям брой цикли, може да доведе до проблеми в стабилността на решението, т.е. неудобството на този подход става видимо когато времевият интервал между измерванията е по-голям в сравнение с базисния изчислителен времеви интервал. Един втори начин за управление на променливата на интервалите от времето за разпространение, е специално да се изчисли подходящия пренос на състоянието и матриците на ковариацията на шумовия процес за целия времеви интервал, необходим за разпространението. Трудността за изпълнение при изчисляването е това, че „при

поискване" на Φ и ковариацията Q ще се променя в зависимост от това как е определен всеки един параметър. Във всеки случай, за прилагането на този подход в реално време, е нужна лека настройка на последователността на изчислението. До сега, ние считаме, че разпространението на уравненията трябва да се извършва след обновяването на оценката на състоянието и ковариацията на грешката в обработвания цикъл (вж. фиг. 2). В момента от цикъла на процеса, когато уравненията на разпространението трябва да се изчислят, дори и ако липсата на следващо измерване е предсказуема, закъснението във времето, през което оценките на състоянието и ковариантата на грешката трябва да се разпространят е неопределимо. Вместо това, обикновено е най-добре да се разграничат изчисленията на разпространението от започването на следващия изчислителен цикъл - за времето, когато ще е налице следващото измерване. При много приложения в реално време, размерът на вектора на състоянието може да се окаже проблем и става необходимо да се елиминират някои елементи, за да е приложим в реално време.

Някой от най - успешните решения на филтъра на Калман се отнасят за измервания в които няма динамика на системата, което не може да се отнесе за приложения в реално време. Нужно е системата да се линеаризира, като има два основни метода за това. Първият е да се линеаризират някои основни позиционни решения чрез определяне на всички възможни състояния на динамичната система, който не зависят от измерванията. Резултатния филтър обикновено представлява обикновен линеен филтър на Калман. Другия метод е да се линеаризира позиционно решение, което непрекъснато се подобрява с оценката на състоянието от обработените измервания. Този филтър се нарича добавъчен филтър на Калман. На (фиг. 4) е показана блок диаграма на общата методология, използваща добавъчен филтър за такова функциониране.



(фиг.4)

На първо място методът има степен на генерализация, която позволява голямо разнообразие от смесвания, подпомагащи информацията за измерването. Това е важно, защото комбинирането на подпомагащи сензори може да варира както при отделна

мисия, така и в по-широк смисъл, по отношение на различни типове оборудване. Филтърът на Калман лесно приема смесвания на различни източници, като тези действия се управляват от системния софтуер. Забележете, че всички подпомагащи измервания се обработват в един единствен Калман филтър - централизиран филтър на Калман. Друга причина за избор на формата на добавъчния филтър за интегриране има връзка с ограниченията, съществуващи в модела на филтъра на Калман. Да допуснем, че динамиката на процеса и връзката с измерването трябва да са линейни. Често, променливите на общото състояние не задоволяват това изискване. Следователно задачата трябва да се линеаризира относно някакво контролно позиционно решение, за да отговори на формата, изисквана от филтъра на Калман.

Третият довод да се избере добавъчния филтър, като форма на интеграция има връзка с поддържането на висока динамика, която отговаря на определянето на позицията, скоростта и надморската височина и на променливите на състоянието. На (фиг. 4), филтърът обработва само комбинацията от инерциални грешки на системата и грешки от подпомагащи източници. Филтърът не обработва интересувашите ни количества на общата динамика на измервателната система, които минават някак си през филтъра без никакви изкривявания или закъснения. Поради тази причина, този вид филтриране понякога се нарича филтриране без изкривявания или филтриране с динамично - точна системна интеграция. Всички динамични величини, които са интересни, т.е. позиция, скорост и надморска височина, не трябва да се моделират като случайни процеси. Филтърът работи само със системни грешки, а това са количества, които се появяват в модела на филтъра на Калман.

Много навигационни системи в реално време са силно зависими от инерциалните навигационни системи за осигуряване на контролно позиционно решение, когато използват такъв тип интеграционна философия. Така инерциалната навигационна система е логичният избор за контрола, въпреки че сама по себе си, нейната точност може да се окаже по-лоша спрямо някои от помощните източници.

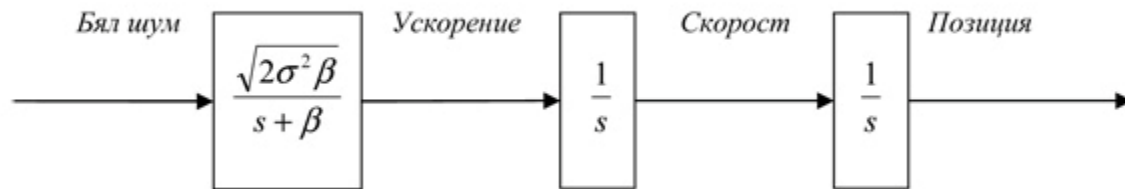
Модел на грешките при извършване на GPS измервания и тяхното филтриране

Основния проблем за потребителите на GPS е прецизната оценка на положението на приемниците, скоростта и времето, базирана на натоварените с шум сигнали приемани от спътниците на системата. Това са идеални условия за обработка на измерванията с филтъра на Калман.

Модел при кодово-фазови измервания

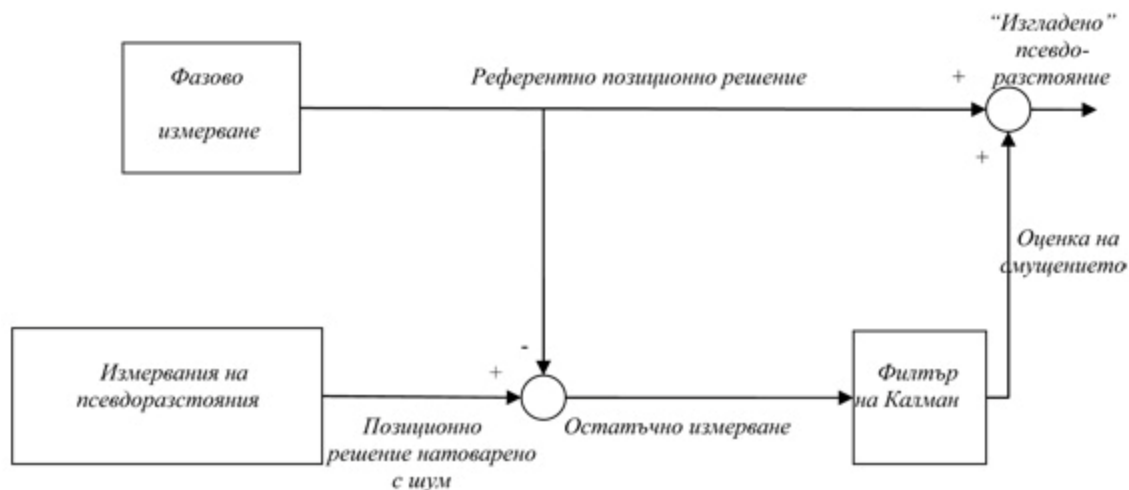
В най-базисната си форма, векторът на състоянието за кодов GPS би следвало да се състои от три позиционни състояния и две състояния на времето на часовника. Той може да бъде линеаризиран или разширен модел на филтъра на Калман, като линеаризацията се случва в някаква фиктивна точка. Когато наблюдателя не е стационарен, а подвижен с приблизително постоянна скорост, имаме един по-добър модел на скорост и позиция (СП). В СП модела всяко пространствено измерение би имало две степени на свобода - едната на позиция и другата - на скорост. При измерване с GPS има три пространствени измерения и едно времево, следователно

векторът на състоянието става осем мерен. СП моделът е неприложим при наличие на сериозно ускорение, защото ускорението на навигираното средство е обикновено кратко и рядко постоянно. Векторът на състоянието за този *Модел на ускорение на състоянието на позицията* (фиг. 5) става единадесет мерен с добавяне на още три състояния на ускорение.



(фиг.5)

Кодовият GPS модел описан по-горе зависи от измерванията на псевдоразстоянията за получаване на информация за определяне на позицията на наблюдателя. Самостоятелното измерване на псевдоразстоянията е относително "шумно", затова чрез филтриране може да се получи подобрена точност на позицията. Способността на тези модели да филтрират шума от измерените псевдоразстоянията зависи от нивото на динамика на приемника. Нивото на динамична нестабилност трябва да бъде точно отразено в размера на спектралната амплитуда на белия шум - S_p , която от своя страна налага големината на параметрите в ковариационната матрицата Q . Колкото по-големи са тези параметри, толкова по-малка е точността на изчислението. В схемата на добавъчния филтър, представена на (фиг. 6), фазовото измерване, представлява контролна информация и е изведена от измереното псевдоразстояние, като остатъкът е подаден към филтъра на Калман. С напълно изключената динамика на наблюдателя остатъчните данни се извеждат към филтъра на Калман сякаш имаме стационарно измерване.



(фиг.6)

Тогава филтърът на Калман може да си позволи удължаване на константата на усредняване на времето до значително редуциране на големите псевдоразстояния на измерване на шума. Когато изходните данни от филтъра се ре-комбинират с данните от контролното позиционно решение се получава решение за окончателната позиция, което е високо чувствително към всякакъв вид динамично движение и също така има малка оценъчна грешка.

Трябва да се отбележи, че основна трудност, свързана с използването на непрекъснати фазови измервания е появата на циклични прекъсвания. Припомняйки, че непрекъснатата фаза е набор от данни, който се сравняват спрямо някаква позната начална точка, след която инкрементните промени във фазата са взаимосвързани, така че точният брой на всички натрупани цикли се взема под внимание, въпреки че може да е извън наблюдение в някакъв отрязък от време. Ако сигналът е слаб, или по-лошо, напълно изгубен, интеграционният процес бързо клони към грешка, която засяга най-много цялата част от числото на фазата на носителя, което наричаме циклична грешка.

Влияния на геометрията на спътниците

Една от най-важните характеристики на системата GPS е не-геостационарната същност на спътниковите орбити. Моментно измерване е натоварено с геометрична загуба на прецизност (GDOP), което се изразява чрез RMS грешка, засягаща решението на позицията и времето чрез метода на най-малките квадрати, причинена от един метър RMS на грешка в измерванията. За дадена група спътници, може да има моменти, когато условието GDOP става единствено, ситуация често наричана „връх на GDOP". Избягването на „GDOP върхове" се осъществява главно чрез промяна на спътниковите комбинации, при наличие на достатъчно спътници, за да се извърши това. В областта на GDOP връха, високата стойност на GDOP причинява отклонение в точността на позиционирането. Известно подобрение може да се получи чрез филтриране, базирано частично на данните от „извън-върховия прозорец", които са при по-ниски нива на GDOP. От тази гледна точка, филтърът на Калман може да се счита за „информационен мениджър", който претегля всяка единица данни, които използва според условията на наблюдение в момента на получаването им. С други думи, на информацията, събрана в периода на "GDOP връха" се дава пропорционално по-малко тежест от филтъра спрямо информацията, събрана преди появата на лошото геометрично условие. От другата страна при постоянен GDOP, точността на събраната информация, в контекста на случайния процес, също намалява във времето и когато трябва да работим в ситуации, където спътниковите ресурси се използват максимално, в частичност проблемите, изискващи огромно количество данни от повече от четири спътника, не винаги е осигурена благоприятна спътникова геометрия. В такива случаи оптималното изчисляване чрез филтъра на Калман е изключително полезно.

Диференциално и кинематично позициониране

При диференциални системи в реално време е неефективно и ненужно прехвърляне на сурови измервания от един на друг приемник. Вместо това, се прави отделна системна грешка свързана с всеки един от спътниците и се дава съответен корекционен параметър. Така се запазва информационния обхват във връзката на

данните между двата приемника и позволява синхронна обработка на данните от измерването от двата приемника. Може би най-често използвания стандарт за диференциална корекция днес е този, определен от стандартния формат за обмен на данни - RTMC. Един филтър на Калман може ефективно да бъде използван за оценка на грешка при референтни измервания, посочен във (3):

$$p_1 - \hat{p}_1(x) = \underbrace{c\Delta t}_x + \underbrace{\lambda_{p1} + \sigma_{p1}}_z + v_{p1} \quad (6)$$

При ситуация в реално време към измерването на втория приемник, се прилага оценка на корекцията, обикновено малко по-късно поради забавянето, появяващо се в обработката на корекцията и закъснения в обединяването на данните. Такова закъснение в прилагането на корекцията към измерванията, извършвани от втория приемник се отразява на проблема с предвиждането от гледна точка на перспективата на самия процес на корекция. За да се реагира точно на този проблем, получените данни за корекцията трябва да се коригират спрямо закъснението във времето, чрез предвиждане, включващо съответните случайни процеси, които управляват данните на корекцията за един отделен спътник.