

Bulgaria National Olympiad 2025

Đề thi gồm 6 bài, mỗi ngày các thí sinh được giao 3 bài.

1. Tìm tất cả các dãy số thực $a_1, a_2, \dots$ sao cho

$$a_{m^2+m+n} = a_m^2 + a_m + a_n$$

với mọi số nguyên dương m và n .

2. Đúng n ô của một lưới ô vuông $n \times n$ được tô màu đen và các ô còn lại có màu trắng. Giá của cách tô màu như vậy là số ô trắng tối thiểu cần được tô lại màu đen sao cho từ bất kỳ ô đen c_0 nào, ta có thể tiếp cận bất kỳ ô đen c_k khác thông qua một dãy $c_0, c_1, \dots, c_k$ các ô đen, trong đó mỗi cặp ô liên tiếp c_i, c_{i+1} có chung cạnh. Giả sử $f(n)$ biểu thị giá lớn nhất trên tất cả các cách tô màu ban đầu với đúng n ô đen. Tìm một hằng số α sao cho

$$\frac{1}{3}n^\alpha \leq f(n) \leq 3n^\alpha$$

với mọi $n \geq 100$.

3. Cho $P(x)$ là một đa thức monic khác hằng với hệ số nguyên và cho $a_1, a_2, \dots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương. Chứng minh rằng có vô hạn số nguyên tố p sao cho tồn tại số nguyên dương n để p chia hết $P(n)^{a_n} + 1$.
4. Cho ABC là một tam giác nhọn có $AB < AC$, trung điểm M của cạnh BC , đường cao AD ($D \in BC$), và trực tâm H . Một đường tròn đi qua các điểm B và D , tiếp xúc với đường thẳng AB , và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai Q . Đường tròn ngoại tiếp tam giác QDH cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai P . Chứng minh rằng các đường thẳng MH và AP vuông góc với nhau.
5. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng có số nguyên dương a sao cho đúng $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ số trong dãy $a+1, a+2, \dots, a+n$ không có ước chính phương ngoài 1.
6. Cho $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ là $n \geq 2$ điểm cho trước trên mặt phẳng, và cho $r > 0$ là một số thực. Alice và Bob chơi một trò chơi sau. Đầu tiên, Alice xây dựng một đồ thị liên thông với các đỉnh tại các điểm $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$, tức là cô ấy kết nối một số điểm bằng các cạnh sao cho từ bất kỳ điểm nào bạn có thể đến bất kỳ điểm nào khác bằng cách di chuyển dọc theo các cạnh. Sau đó, Alice gán cho mỗi đỉnh X_i một số thực không âm r_i , với $i = 0, 1, \dots, n-1$, sao cho $\sum_{i=0}^{n-1} r_i = 1$. Sau đó, Bob chọn một dãy các đỉnh phân biệt $X_{i_0} = X_0, X_{i_1}, \dots, X_{i_k}$ sao cho X_{i_j} và $X_{i_{j+1}}$ được kết nối bằng một cạnh với mọi $j = 0, 1, \dots, k-1$. (Lưu ý rằng độ dài $k \geq 0$ không cố định và đỉnh đầu tiên được chọn luôn phải là X_0 .) Bob thắng nếu

$$\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k r_{i_j} \geq r;$$

nếu không, Alice thắng. Tùy thuộc vào n , hãy xác định giá trị lớn nhất có thể của r mà Bobby có chiến lược chiến thắng.