

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА 75-ТА НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

06.12.2025 г.

ТЕМА ЗА XII КЛАС

Задача 1. Решете уравненията:

А) $(2^{x+3} + 1)^2 - 11 \cdot |2^{x+3} + 1| + 18 = 0$ **3 точки**

Б) $x^{2\log_5^3 x - \frac{3}{2} \cdot \log_5 x} = \sqrt{5}$ **4 точки**

Задача 2. За ъглите на триъгълник е изпълнено равенството:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

А) Определете вида на триъгълника според ъглите му. **4 точки**

Б) Ако $\alpha < \beta < \gamma$ и $\alpha = 30^\circ$, то намерете лицето на триъгълника, ако радиусът на вписаната в него окръжност е $r = 2$. **3 точки**

Задача 3. Дадена е функцията $f(x) = \frac{ax+b}{cx+b}$, където числото:

$$a = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{\sqrt{x^2-5x+10} - \sqrt{x^2-9x+18}};$$

b е ъгловият коефициент на допирателната към графиката на функцията $g(x) = 3x^2 + 3x - 5$ в точката с абсциса $x = -1$;

$$c = \ln d, \text{ където } d = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n.$$

А) Намерете числата a , b и c . **3 точки**

Б) Докажете, че допирателните към графиката на функцията $f(x) = \frac{ax+b}{cx+b}$ в точките на пресичането ѝ с координатните оси са успоредни. **2 точки**

В) Ако $y = m$ и $x = n$ са асимптоти на $f(x)$, то намерете интервалите на изпъкналост на функцията $h(x) = \frac{m}{6}x^4 - \frac{n}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}$. **2 точки**

Време за работа – 4 астрономически часа.

Общ брой точки: 21. За областен кръг се класират учениците, получили не по-малко от 16 точки.

Желаем Ви успех!