

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

23 май 2011 г. – Вариант 1

УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от **два вида**:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте с черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака  кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

(A)  (B) (C) (D)

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

(A)   (D) (C)

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е зачертана със знака  .

Отговорите на задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.) запишете в предоставения свитък за свободните отговори, като за задачи от 26. до 28. вкл. запишете пълните решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Ако $a = \log_4 1$, $b = \left(0,5\sqrt[3]{27}\right)^{-1}$ и c е 15% от 10, посочете вярното твърдение:

- А) $a < b < c$ Б) $b < c < a$ В) $c < b < a$ Г) $a < b$, $b = c$

2. Стойността на израза $\frac{22}{3\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \sqrt{72}$ е:

- А) $-2\sqrt{7}$ Б) $\sqrt{2} - 2\sqrt{7}$ В) $2\sqrt{7}$ Г) $\sqrt{2} + 2\sqrt{7}$

3. Ако x_1 и x_2 са корените на уравнението $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = -0,25 - 2x$ и $x_1 > x_2$, то $\frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ е равно на:

- А) -2 Б) -1 В) 0 Г) 1

4. Решенията на неравенството $\frac{1-2x}{x+2} \leq 0$ са:

- А) $x \in (-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ Б) $x \in \left[-2; \frac{1}{2}\right]$ В) $x \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$ Г) $x \in (-\infty; -2) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

5. Допустимите стойности за израза $\frac{2}{3x^2 + 2x} : \frac{2-2x}{(3x+2)(x+1)}$ са:

- А) $x \neq 0, x \neq -1, x \neq -\frac{2}{3}$ Б) $x \neq 0, x \neq -1, x \neq 1, x \neq -\frac{2}{3}$
В) $x \neq -1, x \neq 1, x \neq -\frac{2}{3}$ Г) $x \neq -1, x \neq 1, x \neq 0$

6. Разстоянието от върха на параболата $y = x^2 + 4x + 5$ до ординатната ос е:

- А) -2 Б) 1 В) 2 Г) $\sqrt{5}$

7. Стойността на израза $\frac{\sin(-75^\circ)\sin 105^\circ - \cos 105^\circ \cos 75^\circ}{2\sin 75^\circ \cos(-75^\circ)}$ е:

- А) -2 Б) $-\sqrt{3}$ В) $\sqrt{3}$ Г) 2

8. Ако $x^{3,5} > x^{1,5}$, то:

- А) $x > 1$ Б) $0 < x < 1$ В) $-1 < x < 0$ Г) $x = 0$

9. Първите три члена на редицата с общ член $a_n = 2n - (-1)^{n+3}$, $n = 1, 2, \dots$ са съответно:

- А) 2, 4, 6 Б) 1, 3, 5 В) 1, 5, 9 Г) 1, 5, 5

10. За растяща геометрична прогресия е известно, че $a_1 = 3$, $S_5 - S_4 = 24$. Частното на прогресията е равно на:

- А) $-\sqrt[4]{8}$ Б) $-\sqrt{2}$ В) $\sqrt{2}$ Г) $\sqrt[4]{8}$

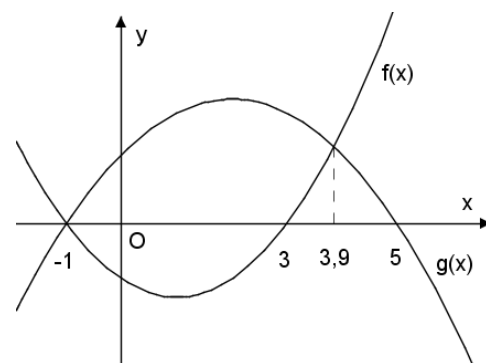
11. Кое от твърденията за графиките на чертежа НЕ е вярно?

А) Решенията на неравенството $f(x) > g(x)$ са стойностите на x от интервала $(-\infty; -1) \cup (3, 9; +\infty)$.

Б) Решенията на неравенството $g(x) > 0$ са стойностите на x от интервала $(-1; 5)$.

В) Решенията на неравенството $f(x) < 0$ са стойностите на x от интервала $(-1; 3)$.

Г) Решенията на неравенството $f(x) < g(x)$ са стойностите на x от интервала $[3, 9; 5)$.



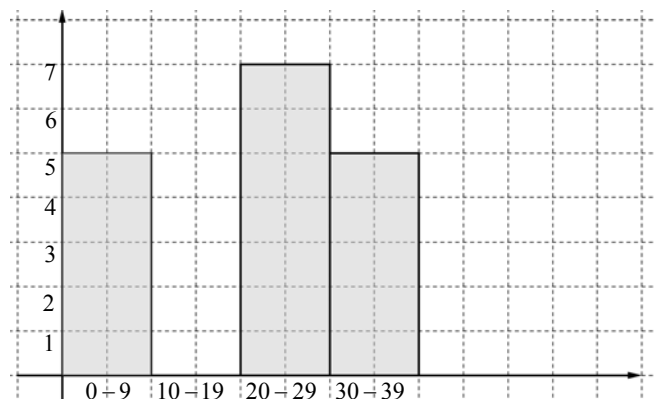
12. В кутия има 84 едноцветни картона, които са бели или зелени. По случаен начин се изважда един от тях. Вероятността той да НЕ е зелен е $\frac{3}{7}$. Колко зелени картона има в кутията?

- А) 24 Б) 36 В) 48 Г) 60

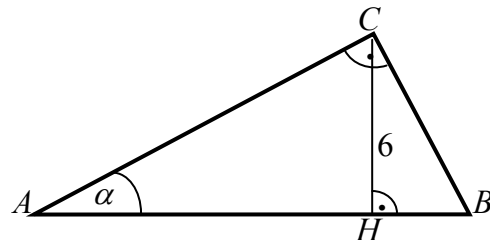
13. На диаграмата е дадено разпределението по брой на 17 числа от 0 до 39.

Статистическият ред, който има такава диаграма, е:

- А) 1,1,1,1,9,11,22,23,24,25,25,30,30,30,35,35,35
Б) 1,1,2,3,9,20,20,21,22,23,25,25,35,35,35,39,39
В) 1,1,1,1,2,2,3,3,11,12,14,18,20,20,30,39,39
Г) 2,3,9,9,9,20,20,22,23,29,30,30,30,31,31,39,39

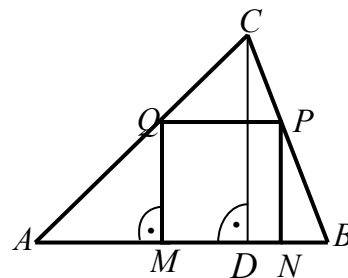


14. На чертежа CH е височина в правоъгълния $\triangle ABC$ ($\angle ACB = 90^\circ$). Ако $CH = 6$ и $\cos \angle BAC = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, то BC е равна на:



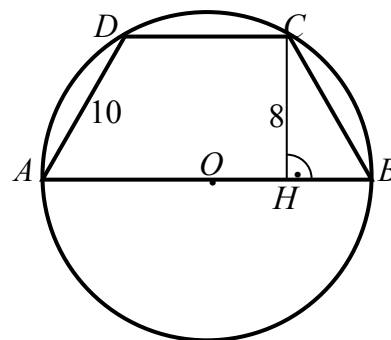
- А) 30 Б) $3\sqrt{5}$ В) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ Г) $\frac{6}{\sqrt{5}}$

15. В остроъгълния $\triangle ABC$ е вписан квадратът $MNPQ$, както е показано на чертежа. Ако $AB = 6$, $CD = 4$, да се намери дължината на страната на квадрата.



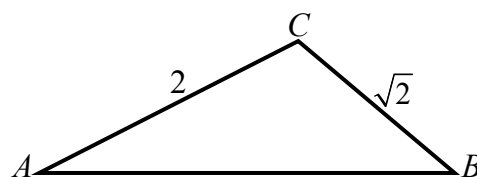
- А) 1,2 Б) 2,4 В) 3 Г) 3,6

16. Трапецът $ABCD$ е вписан в окръжност, като AB е диаметър. Ако височината на трапеца е $CH = 8$, а бедрото $AD = 10$, то радиусът на окръжността е:



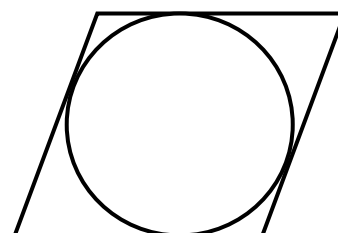
- А) $\frac{11}{3}$ Б) $\frac{25}{4}$ В) $\frac{25}{3}$ Г) 12

17. Даден е $\triangle ABC$ със страни $AC = 2$, $BC = \sqrt{2}$ и лице $S_{\triangle ABC} = 1$. Центърът O на описаната около триъгълника окръжност:



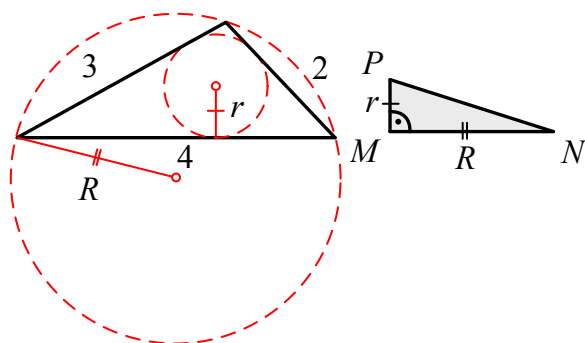
- А) винаги е външна точка за $\triangle ABC$
 Б) винаги е вътрешна точка за $\triangle ABC$
 В) може да е външна точка за $\triangle ABC$, може да е и вътрешна точка за $\triangle ABC$
 Г) винаги лежи на AB

18. Лицето на ромб е равно на 24, а сумата от дължините на диагоналите му е равна на 14. Лицето на вписания в ромба кръг е равно на:



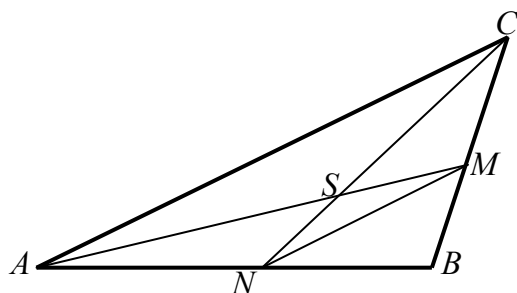
- А) $2,4\pi$ Б) $4,8\pi$ В) $5,76\pi$ Г) $7,2\pi$

19. Страните на триъгълник са 2 cm, 3 cm и 4 cm, а R и r са съответно радиусите на описаната и вписаната в триъгълника окръжност. Построен е правоъгълен $\triangle MNP$ с катети $MN = R$ и $MP = r$. Лицето на $\triangle MNP$ е равно на:



- А) $\frac{2}{3} \text{ cm}^2$ Б) $\frac{4}{3} \text{ cm}^2$ В) $\frac{\sqrt{15}}{12} \text{ cm}^2$ Г) $\frac{5}{32} \text{ cm}^2$

20. За $\triangle ABC$ на чертежа точка M е средата на BC , а точка N е средата на AB . Правите AM и CN се пресичат в точка S . Каква част от лицето на $\triangle ABC$ е лицето на $\triangle MNS$?



- А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{1}{8}$ В) $\frac{1}{10}$ Г) $\frac{1}{12}$

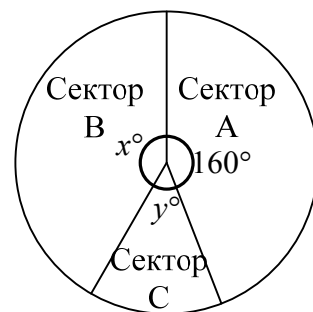
Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете числото x , ако $x > 0$, $x \neq 1$ и $\log_x (\log_2 256) = \frac{3}{2}$.

22. Намерете по-малкия корен на уравнението $2\sqrt{3x-11} = x-2$.

23. За $\operatorname{tg} \alpha = -3$ намерете числената стойност на израза $A = \frac{4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{17 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$.

24. Кръговата диаграма представя разпределението на зрителите в трите сектора на спортна зала. Ако в сектор A има 7200 зрители и $x : y = 3 : 1$, то намерете броя на зрителите в сектор B .



25. Точка O е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, като $AO = 5$, $BO = 3$ и $AB = 7$.

Намерете радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете неравенството $\frac{2x+8}{x^2-3x-4} \geq \frac{x+4}{x^2+x}$ и проверете дали числото

$$a = \left(\frac{9^{-\frac{1}{3}} \cdot 2}{2^{-3} \left(\sqrt[3]{-6} \right) \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \right)^{-1}$$

е негово решение.

27. Иво подрежда пъзел, като всеки ден подрежда с k елемента повече отколкото предния. На дванадесетия ден той подредил два пъти по-малко елемента отколкото през първите 5 дни, взети заедно. На четиринадесетия ден Иво подредил 85 елемента. От колко елемента се състои пъзелът, ако Иво успял да го подреди на шестнадесетия ден, подреждайки с k елемента повече отколкото на петнадесетия ден?

28. За успоредника $ABCD$ е дадено, че $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm и $\angle BAD = 60^\circ$. Точка N е средата на CD , а точка $M \in BC$ и $BM : MC = 2 : 1$. Правите AM и CD се пресичат в точка P , а правите BN и AD се пресичат в точка K . Намерете страните на $\triangle APK$.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Формули на Виет $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a})$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a; \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}; \quad \text{при } a > 0, n \geq 2, k \geq 2 \text{ и } n, m, k \in \mathbb{N}$$

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b \quad \log_a a^x = x \quad a^{\log_a b} = b; \quad \text{при } b > 0, a > 0, a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = 1.2.3... (n-1)n = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n.(n-1)...(n-k+1)}{1.2.3...(k-1)k}$

Вероятност $P(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}} \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d \quad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ $m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{cotg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ

ПО МАТЕМАТИКА 23.05. 2011 г.

Ключ с верните отговори на Вариант 1

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1.	А	2
2.	В	2
3.	Б	2
4.	Г	2
5.	Б	3
6.	В	2
7.	Б	2
8.	А	2
9.	Г	2
10.	Г	3
11.	Г	3
12.	В	3
13.	Б	3
14.	Б	2
15.	Б	2
16.	В	3
17.	В	3
18.	В	3
19.	А	3
20.	Г	3
21.	4	4
22.	4	4
23.	-1,5	4
24.	6750	4
25.	$\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$	4

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
26.	$x \in (-1; 0) \cup (4; +\infty) \cup \{-4\}$ $a = -\frac{3}{8}, a \in (-1; 0)$	10
27.	$S_{16} = 920$	10
28.	$AK = 12 \text{ cm}, AP = 6\sqrt{7} \text{ cm},$ $KP = 6\sqrt{3} \text{ cm}$	10

26. Критерии за оценяване :

1. Свеждане на неравенството $\frac{2x+8}{x^2-3x-4} \geq \frac{x+4}{x^2+x}$ до неравенството

$$\frac{x^2+8x+16}{x(x-4)(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+4)^2}{x(x-4)(x+1)} \geq 0. \quad 4 \text{ т.}$$

2. Намиране на решенията на неравенството

$$x \in (-1; 0) \cup (4; +\infty) \cup \{-4\}. \quad 3 \text{ т.}$$

* Отнема се по една точка:

- При пропуснатото решение $x = -4$.
- При включване на едно от числата $-1; 0$ или 4 в интервалите от решения

3. Преобразуване на израза $a = \left(\frac{9^{\frac{1}{3}} \cdot 2}{2^{-3} (\sqrt[3]{-6}) \cdot 2^{\frac{2}{3}}} \right)^{-1}$ до израза $a = \left(-\frac{2 \cdot 2^3}{3 \cdot 2} \right)^{-1} = -\frac{3}{8}$. 2 т.

4. Определяне на принадлежност на числото a към множеството от решения на неравенството.

1 т.

$$-\frac{3}{8} \in (-1; 0).$$

27. Критерии за оценяване

1. Моделиране с аритметична прогресия. 2 т.
- Означаване на първоначално наредените елементи от Иво като първи член a_1 на аритметичната прогресия. (1 т.)
 - Означаване на числото k като разлика d на аритметичната прогресия (1 т.)
2. Съставяне на системата. 2 т.
- $$\begin{cases} 2a_{12} = S_5 \\ a_{14} = 85 \end{cases}$$
3. Получаване на системата. 2 т.
- $$\begin{cases} 2a_1 + 22d = \frac{2a_1 + 4d}{2} \cdot 5 \\ a_1 + 13d = 85 \end{cases}$$
4. Решаване на системата и намиране $a_1 = 20$ и $d = 5$ 2 т.
5. Определяне на броя на елементите на пъзела ($S_{16} = 920$). 2 т.

28. Критерии за оценяване

1. Намиране на $AK = 12$ cm.

2 т.

$$\triangle DNK \cong \triangle CNB \Rightarrow DK = CB = 6 \text{ cm}$$

или

$$(\triangle DNK \sim \triangle ABK \quad \frac{DK}{AK} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow DK = 6 \text{ cm}),$$

$$AK = AD + DK = 12 \text{ cm}.$$

2. Намиране на $DP = 12$ cm.

3 т.

$$\text{От } BM : MC = 2 : 1 \text{ и } AD = 6 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow CM = 2 \text{ cm и } BM = 4 \text{ cm} \quad (1 \text{ т.})$$

$$\triangle CMP \sim \triangle BMA \quad \frac{CP}{AB} = \frac{CM}{BM} = \frac{1}{2} \Rightarrow CP = 4 \text{ cm}$$

или

$$(\triangle CMP \sim \triangle DAP \quad \frac{CP}{DP} = \frac{CM}{AD} = \frac{1}{3} \Rightarrow CP = 4 \text{ cm,})$$

$$DP = DC + CP = 12 \text{ cm.} \quad (2 \text{ т.})$$

3. Намиране на $AP = 6\sqrt{7}$ cm.

3 т.

От косинусова теорема в $\triangle APD$

$$AP^2 = AD^2 + DP^2 - 2AD \cdot DP \cos 120^\circ, \quad AP = \sqrt{36 + 144 + 72} = \sqrt{252}, \quad AP = 6\sqrt{7} \text{ cm}.$$

4. Намиране на $KP = 6\sqrt{3}$ cm.

2 т.

От косинусова теорема в $\triangle DPK$

$$KP^2 = DK^2 + DP^2 - 2DK \cdot DP \cos 60^\circ, \quad KP = \sqrt{36 + 144 - 72} = \sqrt{108}, \quad KP = 6\sqrt{3} \text{ cm}.$$

