

61. Национална олимпиада по математика

Първи ден, 12 май 2012 г. Кратки решения на задачите

Задача 1. (*Петър Бойваленов*) Редицата $a_1, a_2, \dots$ от естествени числа удовлетворява равенството $a_{n+1} = a_n + 2\tau(n)$ за всяко $n \geq 1$, където с $\tau(n)$ е означен броят на различните естествени делители на n . Възможно ли е два последователни члена на тази редица да са точни квадрати?

Решение. Отговор – Не! Очевидно редицата е строго растяща. Да допуснем, че $a_n = x^2$ и $a_{n+1} = y^2$, $x, y \in \mathbb{N}$. Тогава x и y са с еднаква четност и

$$2\tau(n) = a_{n+1} - a_n = y^2 - x^2 \geq (x+2)^2 - x^2 = 4x + 4.$$

Тъй като $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$ (това следва лесно от факта, че естествените делители на n , евентуално без $\sqrt{n}$, се разбиват на двойки с точно един от двойката, по-малък от $\sqrt{n}$), получаваме $\sqrt{n} > x = \sqrt{a_n}$, т.е. $n > a_n$, което очевидно е невъзможно.

Оценяване: 3 т. за оценката $\tau(n) \geq 2x + 2$, 2 т. за оценката $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$ (1 т. при липса на доказателство), 1 т. за $\sqrt{n} > x = \sqrt{a_n}$ и 1 т. за невъзможността на $n > a_n$.

Задача 2. (*Александър Иванов*) Да се докаже, че естествените числа могат да бъдат оцветени в два цвята така, че едновременно да са изпълнени следните условия:

1. За всяко просто число p и всяко естествено число n числата p^n , p^{n+1} и p^{n+2} не са едноцветни.
2. Не съществува безкрайна геометрична прогресия от едноцветни числа.

Решение. Първо ще оцветим всички естествени числа и нулата в два цвята (зелен и червен) така, че да не съществува безкрайна едноцветна аритметична прогресия и да няма три последователни едноцветни числа.

Разделяме естествените числа и нулата на групи, като i -та група за $i = 0, 1, 2, \dots$ започва с числото $2^i - 1$ и завършва с $2^{i+1} - 2$. Във всяка група числата се оцветяват алтернативно в двата цвята като при четно i първото число в групата се оцветява в зелено, а при нечетно i първото число се оцветява в червено.

Очевидно при това оцветяване няма три последователни едноцветни числа. Ако допуснем, че има безкрайна едноцветна аритметична прогресия с разлика d , то за достатъчно голямо i дължината на i -та група ще бъде по-голяма от d . Това означава, че d е четно число, но тогава два последователно члена на прогресията, лежащи в различни групи са разноцветни. Следователно не съществува безкрайна аритметична прогресия от едноцветни числа. Това оцветяване ще наричаме оцветяване A .

Ще построим оцветяване B , което удовлетворява условието на задачата. Да оцветим всяко естествено число $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ в цвята на числото $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ от оцветяване A . Тъй като в A няма три последователни едноцветни числа, то за всяко просто число p и всяко естествено число n числата p^n , p^{n+1} и p^{n+2} не са едноцветни.

Тъй като в A няма безкрайна едноцветна аритметична прогресия, то при оцветяване B няма безкрайна едноцветна геометрична прогресия.

Оценяване: 1 т. за наблюдението, че съществуването на безкрайна геометрична прогресия е еквивалентно на съществуване на безкрайна аритметична (при друго оценяване); най-много 3 т. за оценяване (без доказателство), което има исканите свойства.

Задача 3. (Николай Николов) Дадено е реално число a , различно от 0 и 1. Сашо и Дени играят следната игра. Първи е на ход Сашо и след това те се редуват, като на всеки ход заменят в уравнението

$$\star x^4 + \star x^3 + \star x^2 + \star x + \star = 0$$

звездичка с цяла степен на a . Сашо печели, ако полученото уравнение няма реални корени, а в противен случай печели Дени. Кой от двамата има печелившия стратегия?

Решение. Сашо има печелившия стратегия при $a > 0$ и $a = -1$, а Дени – при $a < 0$, $a \neq -1$.

Нека уравнението е $f(x) := a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$.

Случай 1: $a = -1$. На първия ход Сашо попълва a_2 . Когато Дени попълни a_1 или a_3 , то Сашо попълва a_3 или a_1 с противоположното число, а когато тя попълни a_0 или a_4 , той попълва a_4 или a_0 със същото число. Сменяйки x с $1/x$ и/или умножавайки $f(x)$ с -1 (ако е нужно), можем да считаме, че $f(x) = x^4 + x^3 \pm x^2 - x + 1$. Остава да съобразим, че

$$2f(x) \geq 2(x^4 + x^3 - x^2 - x + 1) = (x^2 + x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2 + x^2 > 0.$$

Случай 2: $a > 0$. На първия ход Сашо попълва a_1 (с произволна степен на a), а на третия – a_3 , ако този коефициент не е попълнен, и някой друг коефициент в противен случай.

Ако последният непопълнен коефициент е a_0 или a_4 , то Сашо го попълва с достатъчно голямо число (което е степен на a ; положителна при $a > 1$ и отрицателна при $0 < a < 1$). Тогава $f(x) > 0$ за всяко x .

Ако последният непопълнен коефициент е a_2 , то Сашо го попълва с достатъчно голямо число и печели. Наистина, за $g(x) = a_0x^2 + a_1x + a_3/x + a_4/x^2$ ($x \neq 0$) имаме, че $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$. В частност, g е ограничена отдолу функция и значи ако a_2 е достатъчно голямо число, то $f(x) > 0$ за всяко x .

Случай 3: $a < 0$, $a \neq -1$. Сменяйки x с $1/x$ (ако е нужно), можем да считаме, че отначало Сашо е попълнил a_2 , a_3 или a_4 . Тогава Дени попълва a_0 – в третия случай с противоположно по знак на a_4 и печели, а иначе с положително число. Сега Сашо трябва да попълни a_4 с положително число. Нека

$$p_1(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_4/x, \quad p_2(x) = a_0x + a_2/x + a_3/x^2 + a_4/x^3 \quad (x \neq 0).$$

Накрая Дени попълва съответно a_1 или a_2 (съответно при вече попълнено a_2 или a_3) така, че $p_i(1) < p_i(-2)$ ($i = 1, 2$). Понеже

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p_i(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} p_i(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p_i(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} p_i(x) = -\infty,$$

следва, че p_i приема всяка стойност. Значи уравненията $-a_3 = p_1(x)$ и $-a_1 = p_2(x)$ имат решения, т.е. каквото и да попълни Сашо накрая уравнението $f(x) = 0$ ще има реален корен.

Оценяване: 1 т. за $a = -1$, 2 т. за $a > 0$, и 4 т. за $a < 0$, $a \neq -1$.

61. Национална олимпиада по математика

Втори ден, 13 май 2012 г.
Кратки решения на задачите

Задача 4. (*Емил Колев*) Нека n е четно естествено число, а A е множеството от всички ненулеви редици от 0 и 1 с дължина n . Да се докаже, че елементите на A могат да се разделят на непресичащи се тройки така, че за произволна тройка $(a_1a_2 \dots a_n, b_1b_2 \dots b_n, c_1c_2 \dots c_n)$ броят на единиците измежду a_i, b_i, c_i за всяко $i = 1, 2, \dots, n$ е четно число.

Решение. Ще докажем твърдението с индукция по n . За $n = 2$ имаме $A = \{11, 10, 01\}$ и твърдението е очевидно. Допускаме, че то е вярно за някое четно k . При $n = k + 2$ разглеждаме тройка $(a_1a_2 \dots a_n, b_1b_2 \dots b_n, c_1c_2 \dots c_n)$ с исканото свойство. Тогава тройките

$$(00a_1a_2 \dots a_n, 00b_1b_2 \dots b_n, 00c_1c_2 \dots c_n), (01a_1a_2 \dots a_n, 10b_1b_2 \dots b_n, 11c_1c_2 \dots c_n) \\ (10a_1a_2 \dots a_n, 11b_1b_2 \dots b_n, 01c_1c_2 \dots c_n), (11a_1a_2 \dots a_n, 01b_1b_2 \dots b_n, 10c_1c_2 \dots c_n)$$

също имат исканото свойство. Директно се вижда, че по този начин получаваме всички ненулеви редици с дължина $k + 2$.

Оценяване: 1 т. за използване на индукция; 6 т. за вярното ѝ прилагане.

Задача 5. (*Николай Николов и Олег Мушкаргов*) Нека $Q(x)$ е квадратен тричлен, за който функцията $P(x) = x^2Q(x)$ е растяща в интервала $(0, \infty)$. Да се докаже, че $P(x) + P(y) + P(z) > 0$ при $x + y + z > 0$ и $xyz > 0$.

Решение. Ако $x, y, z > 0$ неравенството е очевидно, защото $P(t) > P(0) = 0$ при $t > 0$. Без ограничение можем да предполагаме, че $x, y < 0$ и $z > 0$. Тогава $P(z) > P(-x - y)$ и е достатъчно да докажем, че $P(x + y) + P(-x) + P(-y) > 0$ за произволни $x, y > 0$. Нека $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Тъй като $P(x)$ е растяща функция в интервала $(0, \infty)$, лесно следва, че $a > 0$ и $c \geq 0$ (докажете!). От друга страна,

$$P(x + y) + P(-x) + P(-y) = 2a(x^4 + y^4 - x^2y^2) + 2c(x^2 + y^2) + xy(4a(x + y)^2 + 3b(x + y) + 2c)$$

и тъй като $x^4 + y^4 - x^2y^2 > 0$, $x^2 + y^2 > 0$ и $xy > 0$, достатъчно е да докажем, че $4a(x + y)^2 + 3b(x + y) + 2c > 0$ за $x, y > 0$. Това неравенство следва от факта, че функцията $P(x)$ е растяща, откъдето

$$4a(x + y)^3 + 3b(x + y)^2 + 2c(x + y) = P'(x + y) > 0.$$

Оценяване: 1 т. за преформулировка към неравенството $P(x + y) + P(-x) + P(-y) > 0$, 1 т. за съображението $a > 0$ и $c \geq 0$, 2 т. за преобразуването на $P(x + y) + P(-x) + P(-y) > 0$ в удобен вид, 2 т. за достигане до $4a(x + y)^2 + 3b(x + y) + 2c > 0$ за $x, y > 0$ и 1 т. за довършването.

Задача 6. (*Стоян Боев и Александър Иванов*) Даден е остроъгълен $\triangle ABC$ и произволна вътрешна точка X , различна от центъра на описаната около $\triangle ABC$ окръжност k . Правите AX , BX и CX пресичат за втори път k съответно в точките A_1 , B_1 и C_1 . Нека A_2 , B_2 и C_2 са симетричните точки на A_1 , B_1 и C_1 относно средите на BC , AC и AB съответно. Да се докаже, че описаната около $\triangle A_2B_2C_2$ окръжност минава през постоянна точка, независеща от избора на X .

Решение. (Александър Иванов) Ще докажем, че търсената постоянна точка е ортоцентърът H на $\triangle ABC$ (в случая, когато X съвпада с центъра на k , точките A_2 , B_2 и C_2 съвпадат именно с H). Нека M средата на AB , G е медицентърът на $\triangle ABC$ ($G \in CM$), C' е симетричната точка на C относно M и правата XG пресича C_2C' в точката Y . Тъй като четириъгълникът $C_2C'C_1C$ е успоредник, то $XG : GY = CG : GC_1 = 1 : 2$, т.е. точката Y се определя еднозначно от X .

От $\angle ANB = 180^\circ - \angle ACB$ следва, че точките A , C' , B , H и C_2 лежат на една окръжност (симетрична на k относно M). При това тази окръжност е с диаметър HC' , защото

$$\angle HBC' = \angle HBA + \angle ABC' = \angle HBA + \angle BAC = 90^\circ.$$

Следователно $\angle HC_2Y = 90^\circ$, т.е. C_2 лежи на окръжността с диаметър HY . Аналогично A_2 и B_2 лежат на тази окръжност, с което доказателството е завършено.

Решение. (Емил Колев) Нека O е центърът на k , а O_A , O_B и O_C са симетричните точки на O относно страните BC , CA и AB на $\triangle ABC$. Тъй като отсечките AO_A , BO_B и CO_C взаимно се разполюват в точка S , то $\triangle ABC$ и $\triangle O_AO_BO_C$ са централно симетрични относно S . Ще докажем, че при тази централна симетрия правата CC_1 се изобразява в симетралата на отсечката HC_2 .

Нека M средата на AB и H_C е симетричната точка на H относно M . От $H_CA \parallel BH$ и $H_CB \parallel AH$ следва, че $\angle H_CA C = \angle H_CB C = 90^\circ$, т.е. H_C е диаметрално противоположната точка на C в окръжността k и $\angle H_C C_1 C = 90^\circ$. Следователно симетралата на $H_C C_1$ минава през O и е успоредна на правата CC_1 . От друга страна, симетралата на HC_2 е централно симетричен образ на $H_C C_1$ относно M , т.е. тя минава през O_C и е успоредна на CC_1 .

Така достигахме до извода, че симетралите на HA_2 , HB_2 и HC_2 се пресичат в централно симетричния образ на точката X относно S , която се явява център на описаната окръжност около точките A_2 , B_2 , C_2 и H .

Забележка. Твърдението в задачата остава в сила и когато $\triangle ABC$ не е остроъгълен.

Оценяване: 1 т. за предположението, че ортоцентърът H е търсената точка; 2 т. за построяване на точката C' (съответно H_C) и доказателство, че C' е диаметрално противоположна на H (съответно H_C е диаметрално противоположна на C); 4 т. за довършване на решението. (Фактът, че A , B , H и C_2 лежат на една окръжност не носи точки)

