

Тема от руски турнир по математика – 2012 год.

1. Нека $f(x) = (x - \frac{1}{x})^2$. Докажете, че ако $xyz = 1$, то от отсечките с дължини $f(x), f(y), f(z)$ не може да се построи триъгълник. За всеки случай да припомним, че върховете на триъгълника, по определение, не лежат на една права
2. Всеки от жителите на човекоядски остров принадлежи на едно от двете племена — рицари, които винаги казват истината, или лъжци, които винаги лъжат. Веднъж 2013 островитяни застанали в кръг и всеки заявил: «И двамата ми съседни са лъжци». Започнала кавга и единият от островитяните бил изяден. Останалите 2012 островитяни отново застанали в кръг, възможно е и в друг ред, и всеки заявил: «И двамата ми съседни не са от моето племе». Какъв жител е бил изяден — рицар или лъжец?
3. В младежка организация участват 2012 момчета и 2012 девойки. Всеки от участниците в организацията е участвал в не повече от 100 митинга. Известно е, че всяко момче е посетило заедно с всяко едно от момичетата поне един митинг. Докажете, че има митинг, който е бил посетен поне от 11 момчета и 11 момичета.
4. Редиците (a_n) и (b_n) изпълняват условията $a_{n+3} = a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n$ при $n \geq 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$; $b_{n+3} = b_{n+2} + 2b_{n+1} + b_n$ при $n \geq 1$, $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$. Колко числа се срещат и в двете редици?
5. Върху страните AB, BC, CD и DA на успоредника $ABCD$ са избрани точките X, Y, Z, K съответствено так, че $XZ \parallel BC \parallel AD$ и $YK \parallel AB \parallel CD$. Правите XZ и YK се пресичат в точка P , а правите BZ и DY — в точка Q . Докажете, че точките A, P и Q лежат на една права.
6. Намерете всички прости числа $p, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5$ такива, че $p^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 + q_5^2$.
7. Всяка точка от равнината е оцветена в един от два цвята така, че за всеки успоредник с три едноцветни върха четвъртият му връх е със същия цвят. Докажете, че всички точки от равнината са оцветени в един цвят.
8. Точката O е център на квадрата $ABCD$. Върху страните BC и CD , които служат за основи, са построени външно еднакви равнобедрени триъгълници BCI и CDK . Точката M е средата на CI . Докажете, че правите OM и BK са перпендикулярни.