

675. Первое решение. Рассмотрим ребро l , соединяющее вершины с числами x_i и x_j . Обозначим через $k_i(l)$ число вершин, из которых нельзя пройти в вершину x_i при удалении ребра l . Аналогично, число вершин, из которых нельзя пройти в вершину x_j при удалении ребра l , обозначим $k_j(l)$. Ясно, что $1 \leq k_i(l), k_j(l) \leq n - 1$, $k_i(l) + k_j(l) = n$. Кроме того, для каждого i сумма $\sum_l k_i(l)$ равна $n - 1$ (сумма берется по всем ребрам l , выходящим из x_i), так как из вершины x_i можно пройти по ребрам дерева в каждую из оставшихся $n - 1$ вершин единственным несамопересекающимся путем.

Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, для данного ребра l получим:

$$\frac{k_i(l)}{\sqrt{n-1}} x_i^2 + \frac{k_j(l)}{\sqrt{n-1}} x_j^2 \geq 2 \sqrt{\frac{k_i(l)k_j(l)}{n-1}} |x_i x_j| \geq 2x_i x_j. \quad (*)$$

Последнее неравенство верно, так как $k_i(l)k_j(l) = \frac{(k_i(l) + k_j(l))^2 - (k_i(l) - k_j(l))^2}{4} \geq \frac{n^2 - ((n-1) - 1)^2}{4} = n - 1$.

Сложив неравенства (*) по всем ребрам, получим требуемое неравенство.