LXI Национална олимпиада по математика - общински кръг
София, 18 декември 2011 година

10. клас

1. Намерете най-малкото цяло число *x*, за което:

а) стойността на израза $(x-4)^2(3x-7)(x^2-15)$ е неотрицателна;

3 точки

б) е изпълнена системата $\left|\begin{array}{l}(x-4)^2(3x-7)(x^2-15)\le 0\\ \dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-9x+18}-\dfrac{x+3}{x-6}\ge 0\end{array}\right.$. **4 точки**

2. а) Ако $x\in[-3;3]$, намерете най-голямата и най-малката стойности на всяка от функциите $y=(x+1)(x-4)$, $y=|x+1|(x-4)$ и $y=(x+1)|x-4|$; **4 точки**

б) Намерете стойностите на параметрите a и b, за които уравнението $|x+1|(x-4)=a$ има единствен реален корен в интервала $[-3;3]$, а уравнението $(x+1)|x-4|=b$ има два реални корена в същия интервал. **3 точки**

3. Разглеждаме всички квадратни функции $y=x^2+px+q$, за които $p-q=2012$.

а) Докажете, че графиката на всяка от тях има по две пресечни точки с абсцисната ос; **2 точки**

б) Докажете, че графиките на всички функции имат обща точка М и намерете координатите ѝ; **2 точки**

в) Намерете най-малкото лице, което може да има триъгълник с върхове точка М и двете пресечни точки на графиката на някоя от разглежданите функции с абсцисната ос. **3 точки**