

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \frac{2x^2+x+5}{x+1}$$

Аргументът на логаритъма е дефиниран и неотрицателен за $x \neq \pm 1$, при $x \neq -1$ е дефинирана и рационалната функция (второто събираемо).
 $\Rightarrow f(x)$ е дефинирана, непрекъсната и диференцируема във всеки от интервалите $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} \left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \right]' + \frac{(2x^2+x+5)'(x+1) - (2x^2+x+5)(x+1)'}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2} \cdot 2 \frac{(x+1)'}{(x-1)} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' + \frac{(4x+1)(x+1) - (2x^2+x+5) \cdot 1}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{2(x-1)}{(x+1)} \cdot \left[\frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} \right] + \frac{4x^2+x+4x+1 - 2x^2-x-5}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{2(x-1)}{(x+1)} \cdot \frac{(-2)}{(x-1)^2} + \frac{2x^2+4x-4}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{2}{(x+1)} \left[\frac{-2}{(x-1)} + \frac{x^2+2x-2}{(x+1)} \right] = \frac{2}{(x+1)} \cdot \frac{[-2(x+1) + (x-1)(x^2+2x-2)]}{(x-1)(x+1)} = \\ &= \frac{2}{(x+1)^2(x-1)} \cdot (-2x-2+x^3+2x^2-2x-x^2-2x+2) = \\ &= \frac{2}{(x+1)^2(x-1)} \cdot (x^3+x^2-6x) = \frac{2x}{(x+1)^2(x-1)} (x^2+x-6) = \\ &= \frac{2x(x-2)(x+3)}{(x+1)^2(x-1)} \quad (*) \end{aligned}$$

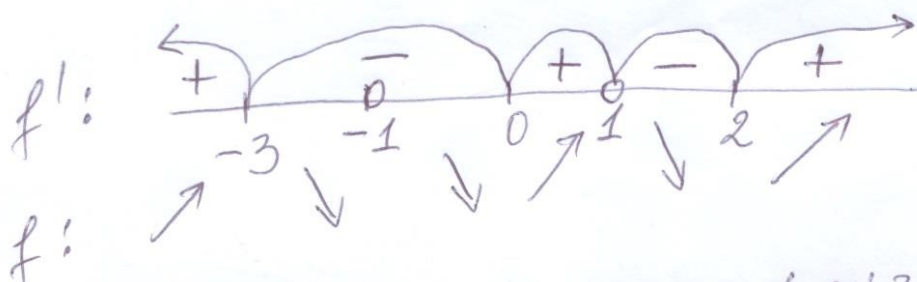
Този вид на $f'(x)$ е удобен за диференциране:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-4}{x^2-1} + \frac{2x^2+4x-4}{x^2+2x+1} = \frac{-4}{x^2-1} + \frac{2(x^2+2x+1)-6}{x^2+2x+1} = \\ &= \frac{-4}{x^2-1} + 2 - \frac{6}{(x+1)^2} \quad (**) \end{aligned}$$

Връщаме се към (*)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x+3) = 0, \text{ т.е. } x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -3$$

$f'(x) \geq 0$ се определя от знака на $x(x-2)(x+3)(x-1) // (x+1)^2 > 0$ в деф. ин-во //



$\Rightarrow f(x)$ расте във всеки от интервалите $(-\infty; -3)$, $(0; 1)$ и $(2; +\infty)$
 $f(x)$ намалява във всеки от интервалите $(-3; -1)$, $(-1; 0)$ и $(1; 2)$

$\Rightarrow$ В $(-3; f(-3))$ достига локален максимум;
 В $(0; f(0))$ — " — минимум;
 В $(2; f(2))$ — " — минимум

// В $(1; f(1))$ няма екстремум, защото f не е дефинирана //

$$\text{Смятаме } f(-3) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-10) = -\ln 4 - 10 = \ln 4^{-1} = \ln \frac{1}{4} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$f(0) = \ln 1 + 5 = 5$$

$$f(2) = \ln 9 + 5$$

$$\text{Използваме (**): } f'(x) = \frac{-4}{x^2-1} + 2 - \frac{6}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = (-4) \cdot [(x^2-1)^{-1}]' + 0 - 6 [(x+1)^{-2}]' =$$

$$= (-4) \cdot (-1)(x^2-1)^{-2} \cdot 2x - 6 \cdot (-2) \cdot (x+1)^{-3} =$$

$$= \frac{8x}{(x^2-1)^2} + \frac{12}{(x+1)^3} = \frac{8x}{(x+1)^2(x-1)^2} + \frac{12}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{4}{(x+1)^2} \left[\frac{2x}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x+1)} \right] = \frac{4}{(x+1)^2} \cdot \frac{(2x^2+2x+3x^2-6x+3)}{(x-1)^2(x+1)}$$

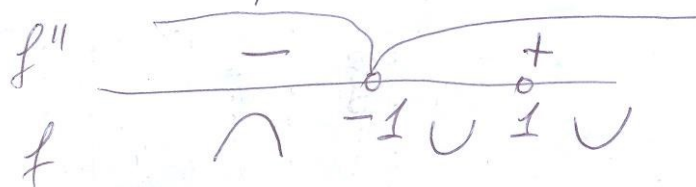
$$= \frac{4}{(x+1)^3(x-1)^2} \cdot (5x^2-4x+3)$$

дискриминантата е $16 - 15 \cdot 4 < 0$
 $\Rightarrow$ тричленът е положителен $\forall x$.

$\Rightarrow f''$ не се анулира $\Rightarrow f(x)$ няма инфлексни точки

Знакът на f'' се определя от знака на $x+1$.

-3-



$\Rightarrow f(x)$ е вдлъбната в интервала $(-\infty; -1)$
 $f(x)$ е изпъкнала в интервалите $(-1; 1)$ и $(1; +\infty)$

Асимптоти:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = [\ln(+0)] = -\infty$$

$$\begin{matrix} x \rightarrow -1 \\ x > -1 \\ x < -1 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+x+5}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1 \\ x < -1}} \frac{6}{x+1} = \pm \infty$$

$\left. \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ е сборът на тези} \\ x \rightarrow -1 \\ x > -1 \\ x < -1 \end{matrix} \right\} \text{ граници. } \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty,$

но за $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ бихме получили $(-\infty) + (+\infty)$, което не е определено.

Имаме
$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(\underbrace{\ln(x+1)^2}_{\downarrow +0} - \underbrace{\ln(x-1)^2}_{\downarrow \ln 4} + \underbrace{(2x^2+x+5)}_{\downarrow 6} \cdot \frac{1}{x+1} \right) =$$

$$= -\ln 4 + \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left(2\ln(x+1) + (2x^2+x+5) \cdot \frac{1}{(x+1)} \right) =$$

$$= -\ln 4 + \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \left[\underbrace{2\ln(x+1)}_{\downarrow 2} \cdot \underbrace{(x+1)}_{\downarrow 0} + \underbrace{(2x^2+x+5)}_{\downarrow 6} \right] \cdot \frac{1}{(x+1)} \quad (***)$$

Да разгледаме $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (\ln(x+1)) \cdot (x+1) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} (\ln t) \cdot t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{t^{-1}} = \left[\frac{-\infty}{+\infty} \right]$
 $\parallel t^{-1} = \frac{1}{t} \parallel$

Лопитал
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\ln t)'}{(t^{-1})'} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2}{t} = -\lim_{t \rightarrow 0} t = 0$$

$\Rightarrow$ За (***) получаваме $= -\ln 4 + \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} (2 \cdot 0 + 6) \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{6}{+0} = +\infty$

$\Rightarrow f(x)$ има вертикална асимптота с уравнение $x = -1$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \geq 1}} f(x) = \ln\left(\frac{2}{\pm 0}\right)^2 + \frac{8}{2} = \ln(+\infty) + 4 = +\infty$$

$\Rightarrow f(x)$ има вертикална асимптота $x=1$.

Има и наклонена ☺:

Използваме, че $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ln 1 = 0$ и

$$\frac{2x^2+x+5}{x+1} = \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2})}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{x(2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2})}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty // \cdot \frac{2+0+0}{1+0} //$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Пресмятаме $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \underbrace{\left[\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2\right]}_0 \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+5}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x})} = \underline{\underline{2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

Пресмятаме $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - \underline{\underline{2x}}) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2+x+5}{x+1} - 2x\right) =$

$$= 0 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+x+5-2x^2-2x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x+5}{x+1} = \frac{-1}{1} = \underline{\underline{-1}}$$

$\Rightarrow$ Има наклонена асимптота с уравнение $y = \underline{\underline{2x}} - \underline{\underline{1}}$

Обобщаване в табличка:

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $-\ln 4 - 10$ max	$\searrow$ $-\infty + \infty$	$\downarrow$ 5 min	$\nearrow$ $+\infty + \infty$	$\searrow$ $\ln 9 + 5$ min	$\nearrow$ $+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+	-
$f''(x)$		-		+		+	

$\downarrow$
 $y = 2x - 1$

$x = -1$

$x = 1$

$\downarrow$
 $y = 2x - 1$

