

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

63. Национална олимпиада по математика
Областен кръг, 30 март 2014 г.

ТЕМА ЗА 11. КЛАС

Задача 1. Да се намерят всички стойности на параметъра a , при които уравнението $2^{2x+1} - (a+8)2^x + a^2 + 4 = 0$ има един положителен и един отрицателен корен.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC , за който $BC^2 + AC^2 = AC \cdot AB$. Да се докаже, че допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност със страната BC , средата на страната AB и средата на ъглополовящата през върха C лежат на една права.

Задача 3. Съществува ли просто число $p \geq 5$, за което уравнението

$$2(p+1)x^3 - 2(p-1)x^2 - (p+3)x + 3p - 1 = 0$$

има рационален корен?

Задача 4. Някои от градовете на една държава са свързани с пътища, като от всеки град излизат точно три пътя и във всеки два града, свързани с път, живеят различен брой жители. На всеки път е записано най-малкото общо кратно на броя на жителите на двата града, които са свързани с този път. Известно е, че сборът на числата върху всички пътища е два пъти по-голям от броя на жителите в държавата. Да се докаже, че градовете в държавата могат да се разделят на две групи така, че няма път, който да свързва два града от една и съща група.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.