

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

63. Национална олимпиада по математика
Областен кръг, 30 март 2014 г.

ТЕМА ЗА 12. КЛАС

Задача 1. За кои стойности на параметъра a системата

$$\begin{cases} y \geq x^2 + ay + 1 \\ x \geq y^2 + ax + 1 \end{cases}$$

има единствено решение?

Задача 2. Да се намери най-малката възможна стойност на страната на равностраничен триъгълник с върхове върху параболата $y = x^2$.

Задача 3. Даден е $\triangle ABC$. За точка X от равнината на триъгълника, различна от върховете му, с A_X и B_X са означени пресечните точки на ъглополовящите на $\sphericalangle AXC$ и $\sphericalangle BXC$ съответно със страните AC и BC . За кои точки X изразът $\frac{1}{A_X C} + \frac{1}{B_X C}$ приема минимална стойност?

Задача 4. Някои от градовете на една държава са свързани с пътища, като от всеки град излизат точно три пътя и във всеки два града, свързани с път, живеят различен брой жители. На всеки път е записано най-малкото общо кратно на броя на жителите на двата града, които са свързани с този път. Известно е, че сборът на числата върху всички пътища е два пъти по-голям от броя на жителите в държавата. Да се докаже, че градовете в държавата могат да се разделят на две групи така, че няма път, който да свързва два града от една и съща група.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.