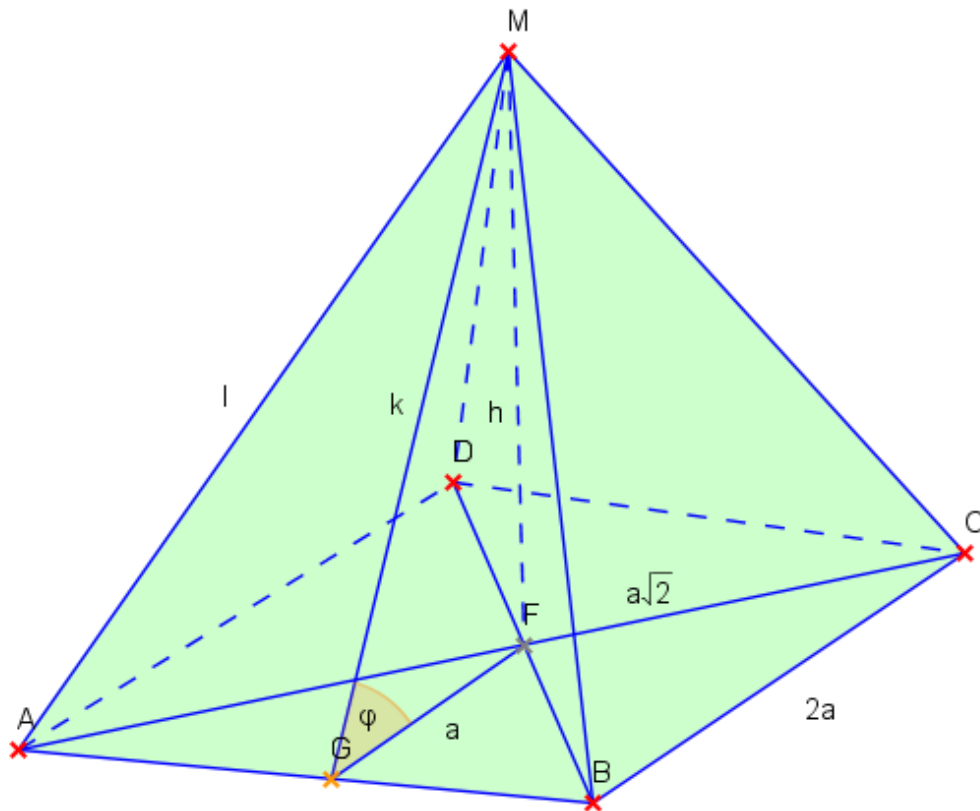




От триъгълника $\triangle MGF$, имаме $h = a \operatorname{tg} \phi$, $k = \frac{a}{\cos \phi}$

От триъгълника $\triangle AGM$ по питагоровата теорема имаме $l = \sqrt{k^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{\cos^2 \phi}}$.

Лицето на околна стена е $S_1 = \frac{2a \cdot k}{2} = a \cdot k = \frac{a^2}{\cos \phi}$. Околната повърхнина е $S_o = 4 \cdot S_1 = \frac{4a^2}{\cos \phi}$.

Лицето на основата е $S_{osn} = (2a)^2 = 4a^2$.

Пълната повърхнина на пирамидата е $S = 4a^2(1 + \frac{1}{\cos \phi})$. Обемът на пирамидата е $V = S_{osn} \cdot h / 3 = \frac{4a^2 \cdot a \operatorname{tg} \phi}{3} = \frac{4a^3 \operatorname{tg} \phi}{3}$.

Обемът също може да се сметне така $V = \frac{S \cdot r}{3}$ за всякаква пирамида. Така намираме $V = \frac{4r}{3} a^2(1 + \frac{1}{\cos \phi})$.

Като приравним двата израза за обема намираме r .

$$\frac{4r}{3}a^2\left(1 + \frac{1}{\cos \phi}\right) = \frac{4a^3 \operatorname{tg} \phi}{3}$$

$$r\left(1 + \frac{1}{\cos \phi}\right) = a \operatorname{tg} \phi$$

$$r \frac{1 + \cos \phi}{\cos \phi} = a \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$$

$$r = a \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi}.$$

От триъгълника ACM , около който е описана голяма окръжност от описаната сфера, намираме $\frac{l.l.2\sqrt{2}a}{4S_{ACM}} = R$. $S_{ACM} = 2\sqrt{2}a.h/2 = a^2\sqrt{2} \operatorname{tg} \phi$. Така получаваме:

$$R = \frac{(a^2 + a^2/\cos^2 \phi).2\sqrt{2}a}{4a^2\sqrt{2} \operatorname{tg} \phi} = \frac{a \frac{1+\cos^2 \phi}{\cos^2 \phi}}{2 \operatorname{tg} \phi} = a \frac{1 + \cos^2 \phi}{2 \sin \phi \cos \phi}$$

Сега по условие $R = k.r$, т.е.

$$a \frac{1 + \cos^2 \phi}{2 \sin \phi \cos \phi} = k.a \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi}$$

или

$$\frac{1 + \cos^2 \phi}{2 \sin \phi \cos \phi} = k \frac{\sin \phi}{1 + \cos \phi}$$

или

$$(1 + \cos^2 \phi)(1 + \cos \phi) = 2k \sin^2 \phi \cos \phi = 2k(1 - \cos^2 \phi) \cos \phi = 2k(1 + \cos \phi)(1 - \cos \phi) \cos \phi$$

Като съкратим $(1 + \cos \phi)$ получаваме:

$$1 + \cos^2 \phi = 2k(1 - \cos \phi) \cos \phi$$

$$1 + \cos^2 \phi + 2k \cos^2 \phi - 2k \cos \phi = 0$$

$$(2k + 1) \cos^2 \phi - 2k \cos \phi + 1 = 0$$

Полагаме $t = \cos \phi$ и търсим за кои положителни стойности на k уравнението

$$(2k + 1)t^2 - 2kt + 1 = 0$$

има корен в интервала $(0, 1)$. Намираме $D = k^2 - 2k - 1 \geq 0$ при $k \geq \sqrt{2} + 1$

За разположението на корените спрямо 0 и 1 има единствена възможност и двата корена да са в интервала $(0,1)$, при условие, че $\frac{-b}{2a} = \frac{k}{2k+1} \in (0,1)$ което е вярно за всички $k > 0$.

Така намираме за $\cos \phi$ две решения

$$\cos \phi = \frac{k - \sqrt{k^2 - 2k - 1}}{2k + 1}, \quad \cos \phi = \frac{k + \sqrt{k^2 - 2k - 1}}{2k + 1}.$$

За да се види, че при най-малката стойност на $k = \sqrt{2} + 1$, когато $\cos \phi = \frac{k}{2k+1} = \frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}+3}$, центровете на двете сфери съвпадат, трябва да се пресметнат от съответните формули r , R и h и да се провери, че $R + r = h$.