

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23.05.2014 г. – ВАРИАНТ 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кой от изразите приема стойност, която е естествено число?

А) $\frac{17}{21} + \frac{12}{42}$ Б) $\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{8}}$ В) $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$ Г) $-\frac{11}{12} - \frac{1}{12}$

2. При $x \neq \pm y$ изразът $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} - 2$ е тъждествено равен на:

А) $\frac{4x^2}{x^2 - y^2}$ Б) $\frac{4y^2}{x^2 - y^2}$ В) $\frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2}$ Г) 0

3. Всички допустими стойности на израза $\sqrt{\frac{1}{4-x}} + \sqrt{x+2}$ са:

А) $x \in (-2; 4)$ Б) $x \in [-2; 4]$ В) $x \in [-2; 4)$ Г) $x \in (-2; 4]$

4. Кое от посочените числа НЕ е решение на неравенството $x^2 - 2x - 3 \geq 0$?

А) $-\sqrt{2}$ Б) $\sqrt{2}$ В) 3 Г) π

5. Ако $\log_{81} a = -\frac{1}{4}$, то стойността на числото a е:

А) $\frac{1}{81^4}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) 3 Г) 81^4

6. Решенията на системата уравнения $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x^2+6y=8 \end{cases}$ са:

А) (1;1), (-2;4) Б) (1;1), (2;0)
В) (-1;3), (2;0) Г) (-1;3), (-2;4)

7. Кое от квадратните уравнения има два реални положителни корена?

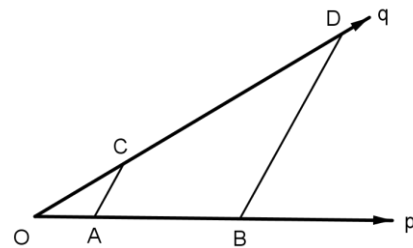
А) $-2x^2 + 7x - 4 = 0$ Б) $2x^2 - 7x - 4 = 0$
В) $2x^2 + 7x + 4 = 0$ Г) $-2x^2 - 7x + 4 = 0$

8. Отношението $\frac{\sin 60^\circ}{\sin 30^\circ}$ е равно на:

- А) $\sin 30^\circ$ Б) $\cos 30^\circ$ В) $\operatorname{tg} 30^\circ$ Г) $\operatorname{cotg} 30^\circ$

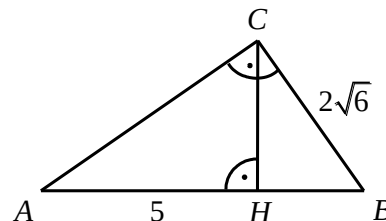
9. Върху раменете на ъгъл $O p \vec{q}$ са разположени точките A, B, C и D , такива че $AC \parallel BD$, $OC = 6 \text{ cm}$, $CD = 10 \text{ cm}$ и $OB = 12 \text{ cm}$. Дължината на отсечката AB е равна на:

- А) 4,5 cm Б) 7,5 cm
В) 8 cm Г) 8,5 cm



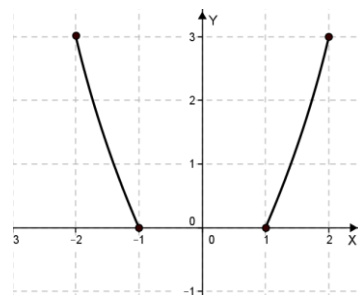
10. На чертежа е даден правоъгълният $\triangle ABC$ с катет $BC = 2\sqrt{6} \text{ cm}$ и височина CH към хипотенузата AB . Ако $AH = 5 \text{ cm}$, то дължината на отсечката BH е:

- А) 2 cm Б) 3 cm
В) 4,8 cm Г) 8 cm



11. Дефиниционното множество на функцията, зададена с графиката си, е:

- А) $x \in [-1; 1]$ Б) $x \in [0; 3]$
В) $x \in [-2; -1] \cup [1; 2]$ Г) $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$



12. Общият член на числова редица е $a_n = \frac{(-1)^{n+1} 2^{n+1} - 2^n}{(-2)^{n-1}}, n \in \mathbb{N}$. Намерете a_{2014} .

- А) -6 Б) -2 В) 2 Г) 6

13. Числата 2, 6, 18, ..., 1458 образуват крайна геометрична прогресия. Броят на членовете на тази прогресия е:

- А) 4 Б) 6 В) 7 Г) 8

14. Ако $\cos 31^\circ = a$, то вярно е, че:

- А) $\sin 31^\circ = \frac{1}{a}$ Б) $\sin 59^\circ = a$ В) $\cos 59^\circ = 1 - a^2$ Г) $\sin 31^\circ = 1 - a$

15. Към реда 1, 2, 6, 8, 11, 21 е добавено ново число. Намерете средноаритметичното на данните от новия ред, ако е известно, че двата реда имат една и съща медиана.

- А) 9 Б) $\frac{49}{6}$ В) 8 Г) 7

16. От група от 8 специалисти трябва да бъде образувана комисия от председател и четирима членове. По колко начина може да стане това?

- А) 43 Б) 280 В) 560 Г) 6 720

17. В $\triangle ABC$ $AC = 5$ cm и $BC = 7$ cm. Ако медианата $CM = \sqrt{21}$ cm ($M \in AB$), то

периметърът на $\triangle ABC$ е равен на:

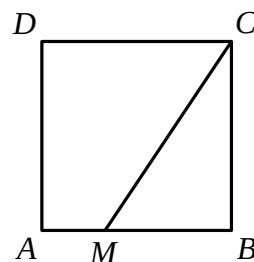
- А) 76 cm Б) 22 cm В) 20 cm Г) 18 cm

18. В $\triangle ABC$ $AC = 14\sqrt{2}$, $BC = 14$, $AB < BC$ и $\angle BAC = 30^\circ$. Мярката на $\angle ABC$ е:

- А) 45° Б) 75° В) 105° Г) 135°

19. Върху страната AB на квадрата $ABCD$ е избрана точка M така, че $S_{AMCD} : S_{MBC} = 5 : 3$. Отношението $AM : MB$ е:

- А) 1:4 Б) 1:3
В) 2:3 Г) 3:4

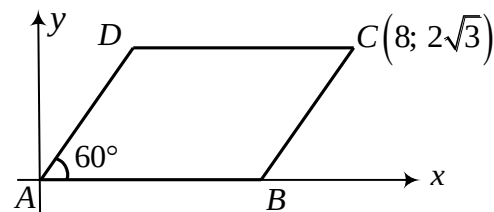


20. На чережа върхът A на успоредника $ABCD$ съвпада с началото на правоъгълна координатна система.

Срещуположният му връх $C(8; 2\sqrt{3})$ е зададен с

координати си и $\angle BAD = 60^\circ$. Лицето на успоредника е:

- А) 32 Б) $16\sqrt{3}$ В) $12\sqrt{3}$ Г) 12

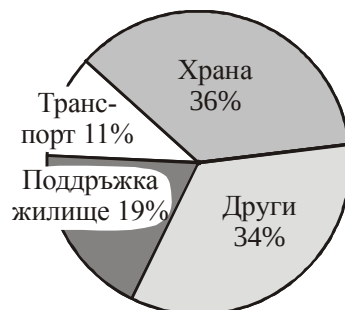


Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

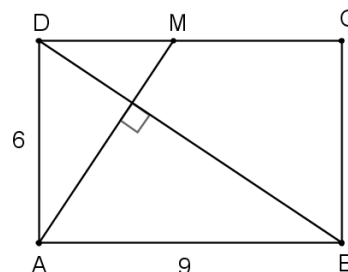
21. Намерете стойността на израза $A = \frac{1 + \cos(180^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} \cdot \frac{1 + \sin(90^\circ + \alpha)}{\sin^2(180^\circ - \alpha)}$ за $\alpha = -30^\circ$.

22. Намерете корените на уравнението $\sqrt{3x+1} - \sqrt{2x-1} = 1$

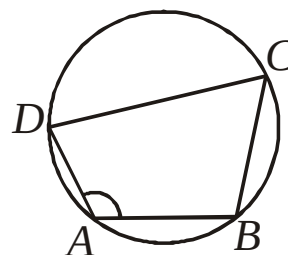
23. На диаграмата са представени данни за годишните разходи на едно семейство, което за храна е изразходвало 5760 лв. Колко лева повече е изразходвало семейството за поддръжка на жилището си, отколкото за транспорт?



24. Даден е правоъгълник $ABCD$ със страни $AB = 9$ cm и $AD = 6$ cm. През върха A е построена права, перпендикулярна на BD , която пресича CD в точка M . Намерете дължината на отсечката CM .



25. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност и $AB = BC = 5$ cm, $CD = 8$ cm и $\angle BAD = 120^\circ$. Намерете дължината на страната AD .



Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението $(x^2 - 3x + 1)^2 - 4(x^2 - 3x) = 9$.

27. В един кашон са поставени еднакви по големина и маса жълти, сини и червени топчета. Вероятността да се извади жълто топче е $\frac{1}{3}$, а синьо – съответно $\frac{2}{5}$. Ако броят на червените топчета е 12, то пресметнете броя на всички топчета в кашона и намерете вероятността при едновременното изваждане на три топчета те да са от трите цвята.

28. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност и описан около окръжност. Ако $\angle DAC = \angle DBA = 30^\circ$ и $AC = 4$ cm, намерете радиусите на вписаните окръжности в триъгълниците ABC и ACD .

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \qquad D = b^2 - 4ac \qquad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \text{ при } D \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$
$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \qquad \sqrt[k]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$
$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \qquad a^{\log_a b} = b \qquad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$

$$l_c^2 = ab - mn$$

Формула за диагоналите на успоредник:

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\operatorname{cotg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 23 май 2014 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с избран отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	В	2
2	Б	2
3	В	2
4	Б	2
5	Б	2
6	Б	2
7	А	2
8	Г	2
9	Б	2
10	Б	2
11	В	3
12	Г	3
13	В	3
14	Б	3
15	В	3
16	Б	3
17	В	3
18	Г	3
19	Б	3
20	В	3
21	-2	4
22	$x_1 = 1, x_2 = 5$	4
23	1280 лв.	4
24	$CM = 5 \text{ cm}$	4
25	$AD = 3 \text{ cm}$	4
26	$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ и $x_4 = 4$	10
27	$P = \frac{108}{473}$	10
28	$r_{ACD} = 4 - 2\sqrt{3} \text{ cm}$ и $r_{ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване:

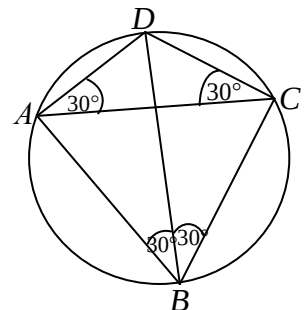
1. Полагане $x^2 - 3x + 1 = t$ или $(x^2 - 3x = u)$. (2 т.)
2. Получаване на уравнението $t^2 - 4t - 5 = 0$ или $(u^2 - 2u - 8 = 0)$. (2 т.)
3. Намиране на корените $t_1 = -1$ и $t_2 = 5$ или $(u_1 = -2$ и $u_2 = 4)$. (2 т.)
4. Намиране на корените $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ на уравнението $x^2 - 3x + 2 = 0$. (2 т.)
5. Намиране на корените $x_3 = -1$ и $x_4 = 4$ на уравнението $x^2 - 3x - 4 = 0$. (2 т.)

27. Критерии за оценяване:

1. Пресмятане вероятността да се извади червено топче
 $1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) = 1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$. (1 т.)
2. От $\frac{4}{15}n = 12$ намиране на броя n на всички топчета $n = \frac{15 \cdot 12}{4} = 45$. (1 т.)
3. Броят на жълтите топчета е $\frac{1}{3} \cdot 45 = 15$, а броят на сините $-\frac{2}{5} \cdot 45 = 18$. (2 т.)
4. Извод, че броят на възможностите за изваждане по 1 топче от трите цвята е $Bl = 12 \cdot 15 \cdot 18$. (2 т.)
5. Преброяване на възможностите за изваждане на
3 от 45 топчета $C_{45}^3 = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 15 \cdot 22 \cdot 43$. (2 т.)
6. Намиране на търсената вероятност $P = \frac{Bl}{P_{45}^3}$, $P = \frac{15 \cdot 18 \cdot 12}{15 \cdot 22 \cdot 43} = \frac{18 \cdot 6}{11 \cdot 43} = \frac{108}{473}$. (2 т.)

28. Критерии за оценяване:

1. $ABCD$ е вписан в окръжност, следователно $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC = 30^\circ$
и $\sphericalangle DCA = \sphericalangle DBA = 30^\circ$. (1 т.)
2. Извод, че $\triangle ACD$ е равнобедрен, като $AD = DC = c$. (1 т.)
3. $ABCD$ е описан около окръжност, следователно
 $AD + BC = AB + CD$. Тогава $BC = AB = a$. (1т.)
4. $\triangle ABC$ е равностранен ($BC = AB = a$ и $\sphericalangle ABC = 60^\circ$), следователно
 $BC = AB = AC = 4\text{ cm}$. (1 т.)



5. За намиране на $AD = DC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. (от косинусова теорема в $\triangle ADC$ или чрез синусова теорема или чрез решаване на равнобедрен триъгълник). (1 т.)
6. Изразяване на $S_{ADC} = \frac{AD^2 \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$ и $p_{ACD} = AD + \frac{AC}{2} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$. (2 т.)
7. Приравняване на полученото лице с $S = p \cdot r$ и намиране на $r_{ACD} = 4 - 2\sqrt{3} \text{ cm}$. (1 т.)
8. Намиране на $r_{ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$ равностранный $\triangle ABC$. (2 т.)