

LXIII Национална олимпиада по математика

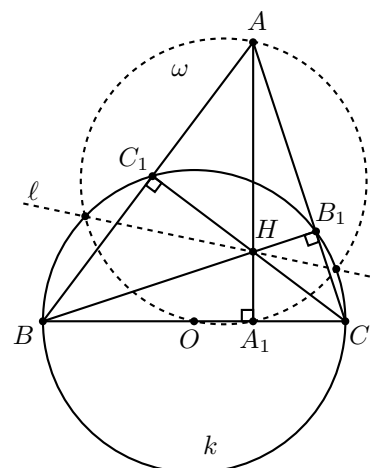
Първи ден, 17 май 2014 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 1. (Теодоси Витанов, Емил Колев) Дадени са фиксирана окръжност k и фиксирана точка A извън нея. Отсечката BC е диаметър на k . Да се намери геометричното място на ортоцентъра на $\triangle ABC$, когато BC се мени.

Първо решение. Нека O е център на k и ω е окръжността с диаметър AO . Нека още AA_1 и BB_1 са височини в $\triangle ABC$ и H е неговият ортоцентър. Тогава степента на H относно ω е равна на $AH \cdot HA_1$ и степента на H относно k е равна на $BH \cdot HB_1$. Понеже тези степени са равни, H лежи на радикалната ос l на k и ω . Обратно, лесно се вижда, че всяка точка от l е ортоцентър на някой триъгълник от искания вид.

Второ решение. Нека $AB \cap k = B'$, $AC \cap k = C'$ и $BC' \cap B'C = H$. Тогава H е ортоцентърът на $\triangle ABC$ и H лежи на полярата l на точката A относно окръжността k (Защо?). Обратно, лесно се вижда, че всяка точка от l е ортоцентър на някой триъгълник от искания вид.



Оценяване (7 точки) 1 т. за описание на геометричното място; 4 т. за доказателство, че всеки ортоцентър на $\triangle ABC$ принадлежи на това геометрично място; 2 т. за довършване на решението.

Задача 2. (Николай Белухов) Дадена е шахматна дъска с размери $m \times n$, където $m \geq 2$ и $n \geq 2$ са естествени числа. Едно оцветяване на клетките на дъската в бяло, зелено, червено и синьо (при което всяка клетка е оцветена в точно един цвят) наричаме *шарено*, ако всяко квадратче 2×2 , съставено от четири клетки, съдържа всеки цвят точно по веднъж. Какъв е броят на шарените оцветявания?

Решение. Да номерираме стълбовете на дъската с $1, 2, \dots, m$, а редовете – с $1, 2, \dots, n$ и нека (i, j) е клетката в i -тия стълб и j -тия ред.

Да разгледаме едно произволно шарено оцветяване S . Ще покажем, че или всеки ред в S съдържа само два различни цвята, или всеки стълб в S съдържа само два различни цвята.

Да допуснем, че S не съдържа правоъгълник 1×3 с хоризонтална по-дълга страна, който съдържа три различни цвята. Тогава във всеки ред в S се редуват два различни цвята, както се искаше.

Нека сега клетките (u, v) , $(u + 1, v)$ и $(u + 2, v)$ са оцветени съответно в трите различни цвята a , b и c . Последователно получаваме, че $(u + 1, v + 1)$ е оцветена в четвъртия цвят d , $(u, v + 1)$ – в c , $(u + 2, v + 1)$ – в a , $(u + 1, v + 2)$ – в b , $(u, v + 2)$ – в a , $(u + 2, v + 1)$ – в c , и т.н. Аналогично получаваме и че $(u + 1, v - 1)$ е оцветена в цвят d , $(u, v - 1)$ – в c , $(u + 2, v - 1)$ – в a , и т.н. В крайна сметка, оказва се, че стълб u съдържа само цветовете a и c , стълб $u + 1$ съдържа само цветовете b и d , и стълб $u + 2$ съдържа само цветовете a и c . Сега вече лесно се вижда, че всеки стълб, чийто номер има същата четност като u , съдържа само цветовете a и c , и всеки стълб, чийто номер има противоположната четност – само b и d , както се искаше.

И така, във всяко шарено оцветяване или във всеки ред, или във всеки стълб се редуват два различни цвята.

Броят на шарените оцветявания, в които във всеки стълб с нечетен номер се редуват два цвята, а във всеки стълб с четен номер – другите два, е равен на $\binom{4}{2} \times 2^m$. Броят на шарените оцветявания, в които във всеки ред с нечетен номер се редуват два цвята, а във всеки ред с четен номер – другите два, е равен на $\binom{4}{2} \times 2^n$. Тези оцветявания, в които имаме редуване както във всеки ред, така и във всеки стълб (с други думи, тези оцветявания, в които цветът на клетката (i, j) зависи само от четностите на i и j) са броени и в двата случая. Следователно, общият брой на шарените оцветявания е равен на $6 \times (2^m + 2^n) - 24$.

Оценяване: (7 точки) 4 т. за доказателство, че във всяко шарено оцветяване или във всеки ред, или във всеки стълб се срещат само два цвята (2 т. за локални наблюдения; 2 т. за индуктивно разсъждение, описващо цялото оцветяване); 3 т. за преброяване (1 т. за броя на оцветяванията в които във всеки ред се редуват два цвята; 1 т. за броя на оцветяванията, броени два пъти; 1 т. за общия брой).

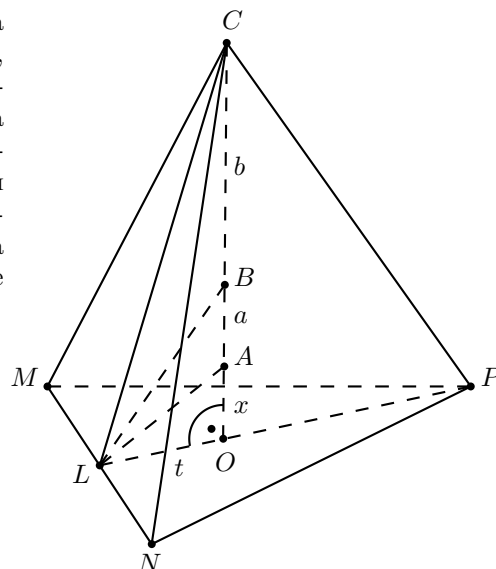
Задача 3. (Александър Иванов) Във всяка точка от пространството е записано по едно реално число, различно от нула. Известно е, че за всеки тетраедър τ , числото в центъра на вписаната сфера на τ съвпада с произведението на числата във върховете на τ . Да се докаже, че всички записани числа са равни на 1.

Първо решение. Нека ℓ е произволна права и A, B и C са три точки от нея взети в този ред, такива, че ако $AB = a$, $BC = b$, то $b > 2a$. Ще докажем, че съществува правилна триъгълна пирамида $MNPC$, такава че B е центъра на вписаната сфера в $MNPC$, а A е центъра на вписаната сфера в $MNPB$. Нека точка O е от правата ℓ (A е между O и B) и $OA = x \in (0, a)$. Построяваме права през O , перпендикулярна на ℓ и върху нея ще докажем съществуването на точка L , такава че BL е ъглополовяща на $\angle CLO$, а AL е ъглополовяща на $\angle BLO$. Нека $OL = t$. Тогава

$$\frac{t^2}{t^2 + (a+x)^2} = \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow t^2 = \frac{x^2(a+x)}{(a-x)}.$$

От друга страна,

$$\frac{t^2}{t^2 + (x+a+b)^2} = \frac{(a+x)^2}{b^2}$$



и след заместване на t^2 получаваме $f(x) = 2bx^2 - a^2x - a^2b - a^3 = 0$. Но $f(0) = -a^2b - a^3 < 0$, $f(a) = a^2(b - 2a) > 0$ и следователно $\exists x_0 \in (0, a)$, такова че $f(x_0) = 0$. С това е доказано и съществуването на точка L с исканите свойства. Остава да построим точките M, N и P по такъв начин, че $\triangle MNP$ е равностранен с център O и среда L на страната MN .

Ако означим с n_A, n_B, n_C, n_M, n_N и n_P числата записани в съответните точки от пространството, то от условието следва, че $n_M n_N n_P n_B = n_A$ и $n_M n_N n_P n_C = n_B$, т.е. $n_B^2 = n_A n_C$.

Сега нека изберем произволни точки A и B и върху правата AB да построим точки C и D такива, че $DC > 2CA$ и $DC > 2CB$. От доказаното по-горе следва, че $n_C^2 = n_A n_D = n_B n_D$, т.е. $n_A = n_B$. Така стигаме до извода, че във всяка точка е записано едно и също естествено число, което от условието лесно следва, че може да бъде само 1-ца.

Второ решение. Да разгледаме две произволни точки X и Y и записаните върху тях числа x и y . Върху правата XY да изберем точки I и J , за които $XY = YI = IJ$. Нека X' е върху правата XY и $XI = JX'$. Да разгледаме симетралната равнина λ на отсечката IJ и нека $ABCX$ и $ABCX'$ са две еднакви правилни триъгълни пирамиди с основа ABC в равнината λ и центрове на вписаните сфери съответно в I и J . Тъй като $n_A n_B n_C n_X = n_I$ и $n_A n_B n_C n_{X'} = n_J$, то $n_X = \frac{n_{X'} \cdot n_I}{n_J}$.

Сега да започнем да движим равнината λ към точката I и да разгледаме сферите S_I и S_J с центрове съответно I и J , които се допират до λ . Нека $A_1 B_1 C_1 X'$ е правилната триъгълна пирамида с основа $A_1 B_1 C_1$ в равнината λ и вписана сфера S_J . Правилната пирамида с основа $A_1 B_1 C_1$ и вписана сфера S_I ще има връх X_1 , като според доказаното по-горе $n_{X_1} = \frac{n_{X'} \cdot n_I}{n_J} = n_X$.

Когато λ се приближава до I радиусът на сферата S_I ще клони към нула, докато $\triangle A_1 B_1 C_1$ ще се приближава до триъгълник, който е основа на правилна триъгълна пирамида с връх X' и вписана сфера с център J и радиус IJ .

Това означава, че точката X_1 ще се приближава към I . От съображения за непрекъснатост върху всички вътрешни точки от отсечката XI (заедно с точката X) е записано едно и също число.

Следователно $x = y$ и значи всички записани числа са равни.

Оценяване: (7 точки) 5 т. за работеща конструкция; 2 т. за довършване на решението.