

LXIII Национална олимпиада по математика

Втори ден, 18 май 2014 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 4. (*Петър Бойваленов*) Да се намерят всички двойки прости числа p и q , за които

$$p^2|q^3 + 1 \text{ и } q^2|p^6 - 1.$$

Решение. Ако $p = 3$, от $q^2|3^6 - 1 = 728 = 2^3 \cdot 7 \cdot 11$ следва, че $q = 2$ и това дава решение на задачата. Нека $p \neq 3$. Тъй като $(q + 1, q^2 - q + 1) = 1$ или 3 , заключаваме, че $p^2|q + 1$ или $p^2|q^2 - q + 1$, като и в двата случая $p < q$. Ако $p + 1 = q$ получаваме решението $p = 2, q = 3$. Оттук нататък ще считаме, че $q \geq p + 2$.

Да разгледаме сега условието $q^2|p^6 - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)$. Тъй като $(q, p - 1) = (q, p + 1) = 1$, имаме $q^2|(p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)$. Освен това $(p^2 - p + 1, p^2 + p + 1) = (p^2 + p + 1, 2p) = 1$ и следователно $q^2|p^2 - p + 1$ или $q^2|p^2 + p + 1$. Първото е невъзможно поради $p^2 - p + 1 < p^2 < q^2$, а от второто следва, че

$$(p + 2)^2 \leq q^2 \leq p^2 + p + 1,$$

т.е. $3p + 3 < 0$, противоречие.

Оценяване (7 точки) 1 т. за ясно разграничаване на случаите $p = 3$ и $p \neq 3$; 1 т. за извода $p < q$ в случая $p \neq 3$; 1 т. за намирането на решението $p = 3, q = 2$, ако е придружено с извода, че остава $p + 2 \leq q$; 1 т. за $q^2|(p^2 - p + 1)(p^2 + p + 1)$; 1 т. за $q^2|p^2 + p + 1$, 2 т. за получаване на противоречие в последния случай.

Задача 5. (*Николай Николов*) Да се намерят всички функции $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, за които

$$f(xy) = f(x + y)(f(x) + f(y)), \text{ за произволни } x, y \in \mathbb{Q}^+.$$

(С $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{R}^+$ означаваме съответно множествата на положителните рационални и реални числа.)

Решение. Ако положим $g(x) = 1/f(x)$, то $g : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ и даденото условие се преобразува във вида

$$(*) \quad g(x + y)g(x)g(y) = g(xy)(g(x) + g(y)).$$

Нека $f(1) = c > 0$, т.е. $g(1) = \frac{1}{c}$. От $(*)$ получаваме $g(x + 1) = cg(x) + 1$ и следователно $g(2) = 2$, $g(3) = 2c + 1$, $g(4) = 2c^2 + c + 1$, $g(5) = 2c^3 + c^2 + c + 1$, $g(6) = 2c^4 + c^3 + c^2 + c + 1$. От друга страна, полагайки $x = 2, y = 3$ в $(*)$ получаваме

$$g(5)g(2)g(3) = g(6)(g(2) + g(3)),$$

което ни води до уравнението

$$4c^5 - 3c^3 - c^2 - c + 1 = 0 \Leftrightarrow (c - 1)(c + 1)(2c - 1)(2c^2 + 2c + 1) = 0.$$

Следователно $c = 1$ или $\frac{1}{2}$.

Случай 1. Ако $c = 1$, то $g(x + 1) = g(x) + 1$. Оттук с индукция $g(n) = n$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ и, нещо повече, $g(x + n) = g(x) + n$ за всяко фиксирано $x \in \mathbb{Q}^+$ и всяко $n \in \mathbb{N}$.

Сега от $(*)$ при $y = n$ получаваме

$$(g(x) + n)g(x)n = g(nx)(g(x) + n),$$

т.е. $g(nx) = ng(x)$. Оттук при $x = p/q$ и $n = q$, където $p, q \in \mathbb{N}$, получаваме $g(x) = x$, за всяко $x \in \mathbb{Q}^+$, т.е. $f(x) = 1/x$, за всяко $x \in \mathbb{Q}^+$.

Случай 2. Ако $c = \frac{1}{2}$, то $g(x + 1) = \frac{1}{2}g(x) + 1$. Оттук

$$g(n) = 2 \quad \text{и} \quad g(x + n) - 2 = \frac{g(x) - 2}{2^n}, \quad x \in \mathbb{Q}^+, \quad n \in \mathbb{N};$$

Сега от (*) при $y = n$ получаваме

$$2g(x+n)g(x) = g(nx)(g(x) + 2),$$

и остава да съобразим, че тези равенства ни водят до $g(x) = 2$, за всяко $x \in \mathbb{Q}^+$, т.е. $f \equiv 1/2$.

Така окончателно задачата има две решения $f \equiv \frac{1}{2}$ и $f \equiv \frac{1}{x}$.

Забележка: Може да се докаже, че всички функции $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, които изпълняват даденото условие са $f \equiv 0$, $f \equiv \frac{1}{2}$ и $f \equiv \frac{1}{x}$, но доказателството е значително по-трудно.

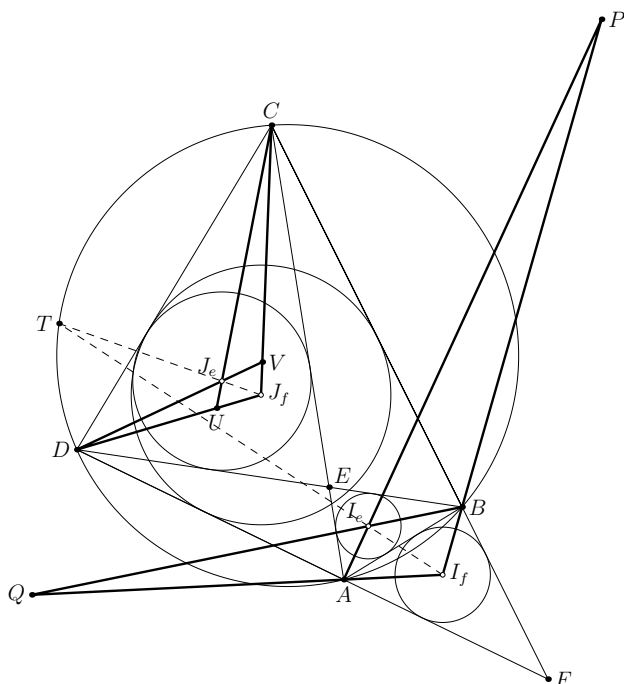
Оценяване: (7 точки) 1 т. за полагането $g(x) = 1/f(x)$ и свеждане до уравнението (*); 2 т. за доказателство, че $f(1) \in \{1, -1, \frac{1}{2}\}$; 2 т. за случая $f(1) = 1$; 2 т. за случая $f(1) = \frac{1}{2}$.

Задача 6. (Николай Белухов) Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност k . Отсечките AC и BD се пресичат в точка E , а лъчите $CB^{\rightarrow}$ и $DA^{\rightarrow}$ се пресичат в точка F . Докажете, че правата през центровете на вписаните окръжности на $\triangle ABE$ и $\triangle ABF$ и правата през центровете на вписаните окръжности на $\triangle CDE$ и $\triangle CDF$ се пресичат върху k .

Решение: Нека I_e, I_f, J_e и J_f са центровете на вписаните окръжности на $\triangle ABE, \triangle ABF, \triangle CDE$ и $\triangle CDF$, съответно. Нека $P = AI_e \cap BI_f$, $Q = AI_f \cap BI_e$, $U = CJ_e \cap DJ_f$ и $V = CJ_f \cap DJ_e$ са центровете на външновписаната окръжност на $\triangle ABC$ срещу A , външновписаната окръжност на $\triangle ABD$ срещу B , вписаната окръжност на $\triangle ACD$ и вписаната окръжност на $\triangle BCD$, съответно.

Имаме $\sphericalangle APB = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \sphericalangle AQB$; следователно, четириъгълникът $ABPQ$ е вписан. Аналогично, вписан е и $CDUV$.

Имаме $\sphericalangle APB = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \sphericalangle UCV$, $\sphericalangle AQB = \frac{1}{2}\widehat{AB} = \sphericalangle UDV$, $\sphericalangle APQ = \sphericalangle ABQ = \frac{1}{2}\widehat{AD} = \sphericalangle UCD$ и $\sphericalangle BQP = \sphericalangle BAP = \frac{1}{2}\widehat{BC} = \sphericalangle VDC$. Следователно, фигурите $ABPQ$ и $UVCD$ са подобни и еднакво ориентирани. Нека T е техният център на подобие. (С други думи, нека T е центърът на единствената въртяща хомотетия, която изобразява първата фигура във втората.)



Имаме $\triangle TAQ \sim \triangle TUD$; следователно, $\triangle TAU \sim \triangle TQD$ и $\sphericalangle ATQ = \sphericalangle(AU, QD) = \sphericalangle AI_eQ$. По този начин, T лежи върху описаната окръжност на $\triangle AI_eQ$. Аналогично, T лежи и върху описаните окръжности на $\triangle BI_eP$, $\triangle CJ_eV$ и $\triangle DJ_eU$.

Имаме, в такъв случай, $\sphericalangle ATB = \sphericalangle ATI_e + \sphericalangle I_eTB = \sphericalangle AQB + \sphericalangle APB = \frac{1}{2}\widehat{AB} + \frac{1}{2}\widehat{AB} = \widehat{AB}$, откъдето T лежи върху k .

Нека точката $T' \in I_fI_e^{\rightarrow}$ е такава, че $I_fA \cdot I_fQ = I_fI_e \cdot I_fT' = I_fB \cdot I_fP$. Тогава T' е обща точка за описаните окръжности на $\triangle AI_eQ$ и $\triangle BI_eP$, различна от I_e ; следователно, $T' \equiv T$ и $T \in I_eI_f$.

Аналогично, $T \in J_eJ_f$, с което задача е решена.

Оценяване: (7 точки) 2 т. за въвеждане на четириъгълниците $ABPQ$ и $UVCD$ и доказателство, че те са подобни; 1 т. за въвеждане на центъра им на подобие; 2 т. за доказателство, че този център лежи върху k ; 2 т. за доказателство, че той лежи и върху правите I_eI_f и J_eJ_f .