

1.зад. Да се намерят най – малката и най – голямата стойност на $f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy$ в множеството $K = [0,4] \times [-4,0]$.

Решение:

$$f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy \Rightarrow f'_x = 3x^2 + 3y; f'_y = -3y^2 + 3x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y = 0 \\ -3y^2 + 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-y)(x+y) + 3(x+y) = 0 \\ 3x^2 + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x+y)(x-y+1) = 0 \\ 3x^2 + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ 3x^2 - 3x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = y - 1 \\ 3x^2 + 3(x+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \cup \emptyset \Rightarrow \text{точките } A(0,0) \text{ и } B(1,-1) \text{ са особени и са от Д.О. на } f(x,y).$$

$$f''_{xx} = 6x; f''_{xy} = 3; f''_{yy} = -6y. \Delta = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''_{xy}^2 = -36xy - 9 \Rightarrow \Delta(0,0) = 0 - \text{допълнителни}$$

$$\text{изследвания. } \Delta(1,-1) = 36 - 9 = 27 > 0 \Rightarrow \text{има екстремум и } f''_{xx} = 6 > 0 \Rightarrow \text{локален}$$

минимум. Множеството K е правоъгълник $OMNP$ с контур отсечката OM , отс. OP ,

отсечката MN и отс. NP . (На черт. е означено D) Точка $A(0,0)$ е от отс. OM , там $y = 0 \Rightarrow$

$$f(x) = x^3.$$

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0 \Rightarrow f - \text{расте} \Rightarrow f_{\min} = f(0) = 0, f_{\max} = f(4) = 64.$$

$$f(-1,1) = -2 - 3 = -5; \text{ по отс } MN \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f(y) = 64 - y^3 + 12y \Rightarrow y' = -3y^2 + 12$$

$$y' = (-3)(y^2 - 4) = (-3)(y-2)(y+2) \Rightarrow y = -2 - \text{мин } C(4,-2) = 48$$

$$y(2) \notin MN. \text{ По } PN \Rightarrow y = -4 \Rightarrow f_1(x) = x^3 + 64 - 12x \Rightarrow f'_1(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$$

$$f_1(4) = 80 - \text{макс}; f_1(2) = 48; \text{ по отс. } OP \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f_2(y) = -y^3 \Rightarrow f'_2(y) = -3y^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow f_2(y) - \text{намаляваща} \Rightarrow f_2 \min(y) = f_2(0) = 0; f_2 \max(y) = f_2(-4) = 64.$$

$$\Rightarrow f_{\min} = 0; f_{\max} = 80.$$

