

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln^3(1 + \sqrt[4]{x})}{(\sqrt{x})^5 + x^2} \operatorname{arctg} x dx ; \ln(1 + \sqrt[4]{x}) < 1 + \sqrt[4]{x} \quad (1) - \text{доказва се} \left(\begin{array}{l} y = \ln x - x < 0 \\ \text{при } x \in (0, \infty) \end{array} \right)$$

$$\text{От (1)} \Rightarrow \ln^3(1 + \sqrt[4]{x}) < (1 + \sqrt[4]{x})^3 \Leftrightarrow \ln^3(1 + \sqrt[4]{x}) < 1 + 3\sqrt[4]{x} + 3\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1 + 3\sqrt[4]{x} + 3\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3}}{(\sqrt{x})^5 + x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{4}} \left(1 + 3x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{4}} \right)}{x^{\frac{5}{2}} \left(1 + x^{-\frac{1}{2}} \right)} dx$$

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{1 + 3x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{4}}}{\left(1 + x^{-\frac{1}{2}} \right) x^{\frac{7}{4}}} dx . \text{ Нека } \varphi(x) = \frac{1 + 3x^{-\frac{1}{4}} + 3x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{4}}}{1 + x^{-\frac{1}{2}}} \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 1 \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x^{\frac{7}{4}}} \text{ е сходящ} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\ln^3(1 + \sqrt[4]{x})}{(\sqrt{x})^5 + x^2} dx \text{ е сходящ.}$$

$$\text{Нека } g(x) = \operatorname{arctg} x \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{1 + x^2} > 0 \Rightarrow g(x) \text{ е монотонно растяща.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow g(x) \text{ е ограничена функция} \Rightarrow \text{по критерия на Абел}$$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\ln^3(1 + \sqrt[4]{x})}{(\sqrt{x})^5 + x^2} \operatorname{arctg} x dx \text{ е сходящ.}$$