



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И
НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 2008 г.

ТЕМА ЗА 8 КЛАС

Задача 1. Дадени са неотрицателните реални числа a , b и c .

а) Ако $0 \leq a \leq b \leq c$, да се докаже, че

$$a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-b)(c-a) \geq 0.$$

б) Да се намери най-голямото реално число k , за което неравенството

$$(a+b+c)^3 \geq k(a+b+c)(ab+ac+bc) + (27-9k)abc$$

е изпълнено независимо от избора на неотрицателните реални числа a , b и c .

Задача 2. Вписаната окръжност в триъгълник ABC допира страните BC , CA и AB съответно в точки D , E и F . Точка K от правата DF и точка L от правата EF са такива, че $AK \parallel BL \parallel DE$. Да се докаже, че

а) точките A , E , F и K лежат на една окръжност;

б) точките C , K и L лежат на една права.

Задача 3. В шампионат по хандбал участват n отбора от различни градове. Всеки ден три от отборите гостуват на четвърти отбор, играят по един мач с него, както и по един мач помежду си (мачове "на неутрален терен"). В това време останалите отбори почиват. При приключване на шампионата всеки отбор трябва да е бил домакин еднакъв брой пъти, като всеки два отбора трябва да са играли точно един мач помежду си. Определете най-малката стойност на n .