

**Секция “Изток” – СМБ**  
**КОЛЕДНО МАТЕМАТИЧЕСКО СЪСТЕЗАНИЕ – 10.12.2016 г.**

**10 клас**

**Времето за решаване е 120 минути.**

**Регламент:** Всяка задача от 1 до 9 има само един верен отговор. “Друг отговор” се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 3 се оценяват с по 3 точки, задачите от 4 до 6 се оценяват с по 5 точки, задачите от 7 до 9 се оценяват с по 7 точки. Задача 10 се решава подробно и се оценява с 15 точки.

**Организаторите Ви пожелават успех!**

Име.....училище.....град.....

1.  $\frac{2017^2 - 2016^2}{2016^2 - 2015^2} =$   
А)  $\frac{4033}{4031}$                       Б)  $\frac{4031}{4029}$                       В)  $\frac{4035}{4033}$                       Г)  $\frac{4033}{4029}$
2. Средната възраст на Ани, Боби, Ваня и Галя е 17 години. На колко години е всяка от близнаците Ваня и Галя, ако Ани е на 13, а Боби е на 19 години?  
А) 15                      Б) 16                      В) 17                      Г) 18
3. Колко цели числа са решения на неравенството  $\frac{2x - 1}{x - 2} \leq 1$  ?  
А) безбройно много    Б) 2                      В) 3                      Г) 4
4. Параболата с уравнение  $y = f(x)$  има връх в точката (1;0) и минава през точката (2;2). На колко е равно  $f(3)$ ?  
А) 3                      Б) 4                      В) 6                      Г) друг отговор
5. Ако  $x_1$  и  $x_2$  са корените на уравнението  $x^2 - 20x + 16 = 0$ , то кое уравнение има корени  $\frac{1}{x_1}$  и  $\frac{1}{x_2}$ ?  
А)  $x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{1}{16} = 0$     Б)  $x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{20} = 0$     В)  $x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{16} = 0$     Г)  $x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{1}{20} = 0$
6. За  $\triangle ABC$  е дадено  $AB = 6$ , при това височината  $BH$  е такава, че  $\angle ABH = 60^\circ$  и  $\angle CBH = 45^\circ$ . На колко е равна дължината на страната  $BC$ ?  
А)  $3\sqrt{3}$                       Б)  $3\sqrt{2}$                       В)  $3\sqrt{6}$                       Г) друг отговор
7. Вписаният четириъгълник  $ABCD$  е такъв, че  $AD = 2$ ,  $BC = 5$  и лъчите  $AD^{\rightarrow}$  и  $BC^{\rightarrow}$  се пресичат в точката  $F$ , като  $CF = 3$ . На колко е равна дължината на  $DF$ ?  
А) 3                      Б) 4                      В) 5                      Г) 6
8. Коя функция има графика, симетрична на графиката на функцията  $y = 2x^2 - 3x + 1$  относно началото на координатната система? (Всички функции са с дефиниционна област  $x \in (-\infty; +\infty)$ .)  
А)  $y = -2x^2 - 3x - 1$     Б)  $y = -2x^2 - 3x + 1$     В)  $y = -2x^2 + 3x - 1$     Г)  $y = 2x^2 - 3x - 1$
9. Медианите към катетите на правоъгълен триъгълник са с дължини  $\sqrt{61}$  и  $\sqrt{109}$ . На колко е равна дължината на медианата към хипотенузата?  
А)  $\sqrt{37}$                       Б)  $\sqrt{65}$                       В)  $\sqrt{71}$                       Г) друг отговор
10. Нека  $f(x) = x^2 + \sqrt{20}x + 7$ . Определете множеството от стойностите на реалния параметър  $m$ , за които неравенството  $f(u) + f(v) > m$  е изпълнено за всеки две реални числа  $u$  и  $v$ .

# ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧИ 1-9

1. А 2. Г 3. В 4. Г 8 5. А 6. Б 7. Б 8. А 9. Г  $\sqrt{34}$

## 10. РЕШЕНИЕ.

\* Функцията  $y = f(x)$  приема най-малка стойност за  $x = -\sqrt{5}$  (3 точки);

\* най-малката стойност на функцията  $y = f(x)$  е  $f(-\sqrt{5}) = 2$  (3 точки);

\* при  $u = v = -\sqrt{5}$  неравенството добива вида  $4 > m$  (1 точка);

\* за  $m \in (-\infty; 4)$  и за произволни реални  $u$  и  $v$  е изпълнено  $f(u) + f(v) \geq f(-\sqrt{5}) + f(-\sqrt{5}) = 4 > m$  (3 точки);

\* ако за произволни реални  $u$  и  $v$  е изпълнено  $f(u) + f(v) > m$ , то и  $f(-\sqrt{5}) + f(-\sqrt{5}) = 4 > m$ , следователно  $m \in (-\infty; 4)$ , т.е. търсеното множество са числата от интервала  $(-\infty; 4)$  (3 точки).

Съставител на темата – Борислав Лазаров, СМБ секция „Изток“

## КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИ 1-9

$$1. \frac{2017^2 - 2016^2}{2016^2 - 2015^2} = \frac{(2017 + 2016)(2017 - 2016)}{(2016 + 2015)(2016 - 2015)}.$$

$$2. B = \Gamma = x, (13 + 19 + x + x) : 4 = 17, x = 18.$$

$$3. \frac{2x - 1}{x - 2} \leq 1 \iff \frac{x + 1}{x - 2} \leq 0, x \in \{-1, 0, 1\}.$$

$$4. y = a(x - 1)^2, 2 = a(2 - 1)^2, a = 2, 2 \cdot (3 - 1)^2 = 8.$$

$$5. \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}, \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{16}.$$

$$6. BH = \frac{1}{2}AB = 3 \text{ (катет срещу ъгъл } 30^\circ); BC = \sqrt{2}BH \text{ (хипотенуза в равнобедрен правоъгълен триъгълник)}.$$

$$7. DF = x, ACF \sim BDF, \frac{AF}{CF} = \frac{BF}{DF}, x(2 + x) = 24, x = 4.$$

$$8. \text{Графиките означаваме с } G \text{ и } G^*; (x; y) \in G \iff (-x; -y) \in G^*, -y = 2(-x)^2 - 3(-x) + 1, y = -2x^2 - 3x - 1.$$

$$9. \text{Катетите означаваме с } 2x \text{ и } 2y; x^2 + 4y^2 = 61, 4x^2 + y^2 = 109, 5(x^2 + y^2) = 170, \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{34}.$$