

УНИВЕРСИТЕТ ПО АРХИТЕКТУРА, СТРОИТЕЛСТВО И ГЕОДЕЗИЯ – СОФИЯ
ЕТ – „АЛИСА – БРАНИМИР ЧАВДАРОВ”
СИМУЛАТИВЕН ИЗПИТ 05.07.2009 год.

Задача 1. 6 точки Дадена е функцията $f(x) = x + \frac{2}{x-1}$.

а) **2 точки** Да се намерят локалните екстремуми на $f(x)$.

б) **2 точки** Да се намери най-малката стойност на функцията $|f(x)|$ в интервала $[-a; a]$, където $a > 0$ е константа.

в) **2 точки** Да се докаже, че за всяка допустима стойност на α е изпълнено:

$$\left| \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha} \right| \geq 2\sqrt{2} - 1.$$

Задача 2. 7 точки Нека k_1 и k_2 са вписаната и външновписаната окръжности за $\triangle ABC$ с обща вътрешна допирателна BC , като $AB < AC$. Нека O_1 и O_2 са съответно центровете им, като $O_1O_2 = d$.

а) **3 точки** Да се докаже, че $R = \frac{d}{4 \sin \frac{\alpha}{2}}$, където $\alpha = \angle BAC$. R - радиус на описаната около

$\triangle ABC$ окръжност.

б) **2 точки** Нека M и N са допирните точки на k_1 и k_2 с BC . Да се докаже, че $MN = d \cdot \sin \frac{\beta - \gamma}{2}$, където $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$.

в) **2 точки** Да се докаже, че ако $\alpha \geq 90^\circ$, то лицето на четириъгълника O_1MO_2N е по-малко от $\frac{d^2}{4} \sin \alpha$.

Задача 3. 7 точки Даден е куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ръб a . Точките K и O са центровете съответно на стените $ABB_1 A_1$ и $ABCD$, а точката M е от ръба BB_1 , като $BM = k \cdot a$, където $k \in \left[\frac{1}{2}; 1 \right]$.

а) **2 точки** Да се определи видът и да се построи сечението на куба с равнината KOM .

б) **3 точки** Да се намери тангенсът на ъгъла φ между равнините KOM и $ABCD$ и да се докаже, че $\varphi \geq 45^\circ$.

в) **2 точки** Ако $k = \frac{2}{3}$ да се намери в какво отношение равнината KOM дели обема на куба.

Забележка!

1) Предложената тема е може би малко по-трудна от една конкурсна тема, но както се казва: "повече труд в тренировката води до по-добри резултати в състезанието".

2) Оценката O се изчислява по формулата $O = 2 + \frac{1}{375} (86p + 330 - |330 - 44p|)$, където p е броят на точките получени от кандидата.