Пролетни математически състезания

Бургас, 31 март – 2 април 2017 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Нека n е естествено число. Да се намерят всички стойности на реалните параметри a и b, за които остатъкът от делението на полинома $ax^n + bx + 2017$ на полинома $x^2 - 1$ е полиномът x.

Решение. Отговор: $a = -2017$, $b = 1$ при четно n, няма такива a и b при нечетно n.

Нека $ax^n + bx + 2017 = p(x)(x^2 - 1) + x$, където $p(x)$ е частното от делението. Тогава при $x = 1$ получаваме $a + b + 2017 = 1$, а при $x = -1$ имаме $(-1)^n a - b + 2017 = -1$. От тези две уравнения за a и b получаваме $a(1 + (-1)^n) + 4034 = 0$, което няма решение при нечетно n, а при четно n намираме $a = -2017$. Тогава $b = -2016 - a = 1$. Имаме (при четно n)

$$-2017x^n + x + 2017 = -2017(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + 1)(x^2 - 1) + x.$$

Оценяване. (6 точки) 1 т. за използване на теоремата за деление с частно и остатък на полиноми, по 1 т. за двете полагания, 3 т. за решаване на системата (включително отхвърляне на нечетните n).

Задача 9.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$, в който вписаната окръжност се допира до страните AB и BC съответно в точки M и N. Ъглополовящите на ъглите ACB и BAC пресичат правата MN съответно в точки K и P. Да се намери ъгъл ABC, ако $AC = 2KP$.

Решение. Отговор: 60°. Ще използваме стандартните означения за ъглите в $\triangle ABC$. Нека I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Тъй като $\sphericalangle APM = \sphericalangle BMN - \sphericalangle MAP = (90 - \beta/2) - \alpha/2 = \gamma/2 = \sphericalangle ICB$, четириъгълникът $IPNC$ е вписан. Тогава $\sphericalangle IPC = \sphericalangle INC = 90^\circ$. От $\sphericalangle APM = \gamma/2 = \sphericalangle ICA$ следва и че четириъгълникът $AKPC$ е вписан, откъдето $\sphericalangle AKC = \sphericalangle APC = 90^\circ$.

Нека S е средата на страната AC. Тогава PS и KS са медиани съответно в правоъгълните триъгълници APC и AK и следователно $KS = PS = AC/2$. Оттук и от условието $AC = 2KP$ следва, че $\triangle KPS$ е равностранен.

Тъй като $\sphericalangle CSP = \alpha$ като външен за равнобедрения $\triangle APS$ и аналогично $\sphericalangle ASK = \gamma$, получаваме $60^\circ = \sphericalangle KSP = 180^\circ - (\sphericalangle ASK + \sphericalangle CSP) = \beta$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за въвеждане на центъра на вписаната окръжност, по 1 т. за вписаните $IPNC$ и $AKPC$, 2 т. за доказване, че $\triangle KPS$ е равностранен, 1 т. за довършване.

Задача 9.3. На дъската е написано числото 2017. Николай трябва да получи числото 1 с помощта на краен брой от следните операции: от n се получава $n + 1$ или $n/2$, като второто е разрешено само ако n е четно (например от 2017 се достига до 2048 с добавяне на 1 и след това до 1 с деление на 2). Възможно ли е Николай да организира получаването на 1 така, че някоя от цифрите $0, 1, \ldots, 9$ да не се появи на дъската на никоя от стъпките?

Решение. Отговор: Не!

Да наречем една цифра *добра*, ако се появява на дъската. Цифрите 2, 0, 1, 7 и 8 очевидно са добри, а 9 също е добра, защото се получава на третия ход (в 2019 или 1009). Тъй като 1 може да се получи само от 2, а 2 само от 4, цифрата 4 също е добра.

Ще докажем, че 5 е добра цифра. Действително, за да не получим 5 като последна цифра, трябва да приложим деление на 2 най-късно при 2024, при което ще получим число между 1009 и 1012. Сега, отново за да не получим 5 като последна цифра, трябва да приложим деление на 2 най-късно при 1014, при което ще получим число, започващо с 5.

Цифрата 6 също е добра. Действително, за да не я получим като последна цифра, трябва последователно да сме в интервала $[2017, 2025]$, после в $[1009, 1015]$, оттам в $[505, 515]$, после в $[254, 259]$ (иначе имаме 6 като втора цифра), след което в $[127, 135]$ и на следващата стъпка непременно ще получим число, започващо с 6.

По подобен начин се вижда, че и цифрата 3 е добра. За да не я получаваме като последна цифра, трябва последователно да сме интервалите $[2017, 2022]$, $[1009, 1012]$, $[505, 512]$, $[254, 262]$, $[127, 129]$, [64, 72 и на следващата стъпка няма как да не я получим като първа цифра.

Оценяване. (7 точки) по 1 т. за отхвърляне на 9, 4 и 5, по 2 т. за отхвърляне на 6 и 3.

Задача 9.4. Да се намерят всички прости числа p и q, за които p^2+pq+q^2 дели p^3+q^3-p.

Решение. Отговор: $p=5$, $q=3$.

Ако $p=q$, то $3p^2|2p^3-p \iff 3p|2p^2-1$, откъдето следва, че $p|2p^2-1$, което е невъзможно.

Нека $p \neq q$. От условието и от равенството $p^3+q^3-p=(p+q)(p^2+pq+q^2)-2pq(p+q)-p$ следва, че $p^2+pq+q^2|p(2q(p+q)+1)$. Тъй като $(p, p^2+pq+q^2)=1$, заключаваме, че $p^2+pq+q^2|2q(p+q)+1$. Ако $p^2+pq+q^2 \leq \frac{2q(p+q)+1}{2}$, то $2p^2 \leq 1$, което е невъзможно. Следователно $p^2+pq+q^2=2q(p+q)+1 \iff q(p+q)=(p-1)(p+1)$.

Тъй като q е просто число, то дели един от множителите $p-1$ и $p+1$.

Ако $p+1=kq$, $k \in \mathbb{N}$, то $kq+q-1=k(kq-2)$ и значи $k|q-1$ и $q|2k-1$, откъдето следва, че $q-1$ е положително кратно на k, което не надминава $2k-2$. Тогава $q-1=k$ и получаваме $k=2$, $q=3$ и $p=5$.

Ако $p-1=mq$, $m \in \mathbb{N}$, то $mq+q+1=m(mq+2)$ и значи $m|q+1$ и $q|2m-1$, откъдето следва, че $q+1$ е положително кратно на m, което не надминава $2m$. При $q+1=m$ получаваме $m^2-2m+2=0$, което е невъзможно, а при $q+1=2m$ намираме $m=1$, което също е невъзможно.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за намиране на делимо с по-ниска от трета степен, 2 т. за достигане до уравнение, 3 т. за решаване на полученото уравнение.

Задача 10.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които точно две от целочислените решения на неравенството

$$\log_a |\log_{\frac{2}{a}}(x+1)| < 0,$$

не надминават 3.

Решение. Очевидно има смисъл да разглеждаме само положителни стойности на a, за които $a \neq 1, 2$. Ясно е също, че $x > -1$ и $x \neq 0$.

1) Нека $a \in (0,1)$. Сега $|\log_{2/a}(x+1)| > 1$. Оттук имаме $\log_{2/a}(x+1) > 1$ или $\log_{2/a}(x+1) < -1$, което води до $x+1 > 2/a$ или $x+1 < a/2$. Това дава решенията $x \in (-\infty, -1+a/2) \cup (-1+2/a, +\infty)$. Тъй като $2/a-1 > 1$ и $-1 < -1+a/2 < 0$, две целочислени решения, ненадхвърлящи 3, се получават, когато $2/a-1 < 2$, т.е. когато $a > 2/3$. Така в този случай получаваме $a \in (2/3, 1)$.

2) Нека $a \in (1,2)$. Сега получаваме последователно $|\log_{2/a}(x+1)| < 1$ и $-1 < \log_{2/a}(x+1) < 1$, откъдето $x \in (-1+a/2, -1+2/a)$. Очевидно в този интервал има само една целочислена стойност за x.

3) Накрая нека $x \in (2, +\infty)$. Както в 2) получаваме $x \in (-1+2/a, -1+a/2)$. Точно две целочислени решения за x, които са по-малки или равни на 3, се получават, когато $2 < -1+a/2 \leq 3$. Така в този случай получаваме $a \in (6, 8]$.

Окончателно имаме $a \in (2/3, 1) \cup (6, 8]$.

Оценяване. по 1 т. за решаване на неравенството във всеки един от трите случая; 3 т. за определяне на търсените стойности на x; отнема се 1 т. при неправилно определяне на принадлежността на краищата на интервалите към множеството на решенията.

Задача 10.2 Нека D е допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност със страната AB. Нека I_1 и I_2 са центровете на вписаните окръжност в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ съответно. Да се докаже, че описаната около $\triangle I_1 I_2 D$ окръжност се допира до AB.

Решение. Да означим с P и Q допирните точки на вписаните в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ окръжности със страните AD и BD съответно. Тогава

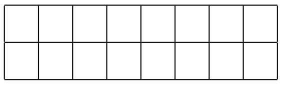
$$DP = \frac{1}{2}(DC+DA-AC) = \frac{1}{2}(DC+DB-BC) = DQ$$

и следователно вписаните в $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ се допират до CD в една и съща точка. Остава да съобразим, че $\sphericalangle I_2 I_1 D = \sphericalangle DI_1P = \sphericalangle I_2DQ$, с което доказателството е завършено.

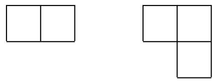
Забележка: В сила е по-общото твърдение, че ако D е произволна точка от страната AB, то окръжността, описана около $\triangle I_1I_2D$ минава през постоянна точка, а именно, допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност със страната AB.

Оценяване: 3 т. за $DP = DQ$; 1 т. за допирането на двете окръжности в точка от CD; 2 т. за довършване на решението.

Задача 10.3. Нека A_n е броят на начините на покриване на правоъгълник $2 \times n$

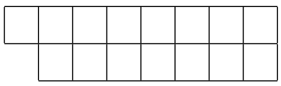


С плочки от вида



Да се докаже, че за всяко $n \geq 3$ е в сила неравенството $A_n > (1+\sqrt[4]{2})^{n-1}$.

Решение. Да означим с B_n броя на начините на покриване на фигура от вида (с n клетки в първия ред)



В сила са рекурентните уравнения:

$$\begin{aligned} A_n &= A_{n-1} + A_{n-2} + 2B_{n-1} \\ B_n &= B_{n-1} + A_{n-2} \end{aligned}$$

Първото уравнение, написано за A_{n-1} има вида $A_{n-1} = A_{n-2} + A_{n-3} + 2B_{n-2}$. Изваждайки това уравнение почленно от израза за A_n, получаваме

$$\begin{aligned} A_n - A_{n-1} &= A_{n-1} - A_{n-3} + 2(B_{n-1} - B_{n-2}) \\ &= A_{n-1} - A_{n-3} + 2A_{n-3}, \end{aligned}$$

откъдето $A_n = 2A_{n-1} + A_{n-3}$.

Сега оценката за A_n се доказва по индукция при използване на неравенството $\sqrt[4]{2} < 6/5$. Лесно се проверява, че $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 5 > 11^2/5^2 > (1+\sqrt[4]{2})^2$, $A_4 = 2A_3 + A_1 = 11 > 11^3/5^3 > (1+\sqrt[4]{2})^3$ и $A_5 = 2A_4 + A_2 = 11 > 11^3/5^3 > (1+\sqrt[4]{2})^3$ за базата на индукцията. По-нататък,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 2A_n + A_{n-2} \\ &> 2(1+\sqrt[4]{2})^{n-1} + (1+\sqrt[4]{2})^{n-3} \\ &= (1+\sqrt[4]{2})^{n-3}(2 + 4\sqrt[4]{2} + 2\sqrt[4]{4} + 1) \\ &> (1+\sqrt[4]{2})^n, \end{aligned}$$

с което доказателството е завършено.

Оценяване. 3 т. за извеждане на рекурентното уравнение; 1 т. за случая базата на индукцията, 3 т. за получаване на оценката по индукция.

Задача 10.4. Дадено е множеството $X = \{0, 1, \ldots, 20\}$, както и петелементните подмножества на X:

$$B_k = \{k, (3+k) \bmod 21, (4+k) \bmod 21, (9+k) \bmod 21, (11+k) \bmod 21\}, k = 0, 1, \ldots, 20.$$

Някои от елементите от X оцветяваме в червено. Какъв е минималният брой елементи, които трябва да се оцветят, така че всяко от множествата B_k да съдържа като оцветени, така и неоцветени числа.

Решение. Всяка двойка от числа от X се среща в точно едно от множествата B_k. Това се проверява лесно, ако забележим, че разликите $(a-b)\text{mod}21$, $a, b \in \{0, 3, 4, 9, 11\}$, $a \neq b$, пробягват всички ненулеви остатъци по модул 21. В частност оттук следва, че всеки елемент на X се появява в точно пет от множествата B_k.

Нека B_m е множество, съдържащо максимален брой оцветени числа. Очевидно този брой е поне 2. Да допуснем, че той е точно 2 и да означим със c броя на всички оцветени елементи от X. Да означим още с x_1 и x_2 броя на подмножествата, съдържащи съответно 1 и 2 оцветени точки. Очевидно имаме

$$\left|\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 21 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 5c \\ & & x_2 & = & \binom{c}{2} \end{array}\right. ,$$

откъдето $21-5c+\binom{c}{2}=0$, т.е. $c^2-11c+42=0$. Последното уравнение няма реални корени. Следователно съществува множество с поне 3 оцветени числа. Оттук получаваме, че броят на оцветените числа от X е поне 7. За това е достатъчно да разгледаме множествата B_k, които съдържат фиксирано неоцветено число. Стойността 7 се достига; да оцветим, например, всички числа, които се делят на 3.

Оценяване. 1 т. за наблюдението, че всяка двойка се появява точно веднъж в блоковете B_k, 1 т. за наблюдението, че всяка точка се появява в точно 5 блока; 3 т. за доказване, че 7 е долна граница за броя на оцветените точки; 2 т. за конструиране на пример на такова подмножество на X.

Задача 11.1 Да се реши неравенството

$$\sin x+\cos x+\sin 2x\leq 1.$$

Решение. Полагаме $y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ и тогава $\sin 2x=y^2-1$. Неравенството е еквивалентно на $y^2+y-2\leq 0$ с решения $y\in[-2,1]$. Следователно $-2\leq\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq 1$, откъдето $-\sqrt{2}\leq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$. Лявото неравенство е изпълнено за всяко x, а за дясното получаваме

$$\frac{3\pi}{4}+2k\pi\leq x+\frac{\pi}{4}\leq\frac{9\pi}{4}+2k\pi,$$

или $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leq x\leq 2\pi+2k\pi$ за $k\in Z$.

Оценяване. 1 т. за полагането $y=\sin x+\cos x$; 2 т. за получаване на уравнението $y^2+y-2\leq 0$; 1 т. за решаване на това уравнение; 2 т. за довършване на решението.

Задача 11.2 Даден е остроъгълен триъгълник ABC. Нека H и G са съответно ортоцентърът и медицентърът на $\triangle ABC$. Точка P е пресечната точка на медианата през B и височината през A, а точка Q е пресечната точка на медианата през C и височината през B. Ако точките H, G, P и Q лежат на една окръжност, да се докаже, че триъгълникът, образуван от медианите на $\triangle ABC$, е подобен на $\triangle ABC$.

Решение. Тъй като H, G, P и Q лежат на една окръжност, то $\sphericalangle BPH=\sphericalangle CQH$. Следователно $\sphericalangle GBC=\sphericalangle GCA$, откъдето следва, че $\triangle BB_1C\sim\triangle CGB_1$, където B_1 е средата на AC. От тук получаваме $B_1G.B_1B=B_1C^2$ или $\dfrac{1}{3}m_b^2=\left(\dfrac{1}{2}b\right)^2$. Като използваме, че $m_b=\dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ от последното равенство следва, че $a^2+c^2=2b^2$. От формулите за медианите пресмятаме:

$$m_a=c\frac{\sqrt{3}}{2},m_b=b\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ и }m_c=a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

откъдето следва твърдението на задачата.

Оценяване. 1 т. за равенството $\sphericalangle GBC=\sphericalangle GCA$; 1 т. за подобието $\triangle BB_1C\sim\triangle CGB_1$; 1 т. за равенството $B_1G.B_1B=B_1C^2$; 2 т. за равенството $a^2+c^2=2b^2$; 1 т. за пресмятане на медианите.

Задача 11.3 Да се намерят всички естествени числа a, за които числото

$$N=1+a^a+a^{a^2}+\cdots+a^{a^{a+1}}-a$$

е просто.

Решение. При $a = 1$ получаваме $N = 1 + a + a^{a^2} - a = 2$, което е просто число. Ако $a > 1$ е нечетно число, то N е четно число и $N > 2$, т.е. N не е просто число.

Ако a е четно число, записваме $a = 2^k b$, където b е нечетно число. Да разгледаме числото $t = a^{2^k} + 1$. Имаме $a^a \equiv -1 \pmod t$ и $a^{a^2} \equiv a^{a^3} \cdots \equiv a^{a^{a+1}} \equiv 1 \pmod t$. Тогава

$$N \equiv 1 - a - 1 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{a \text{ пъти}} \equiv 0 \pmod t$$

и N не е просто число. Единствената стойност на a е $a = 1$.

Оценяване. 1 т. за отговор; 1 т. за случая a нечетно число; 2 т. за разглеждане на числото $t = a^{2^k} + 1$; 3 т. за довършване на решението.

Задача 11.4 Дадено е естествено число n и две дъски. На първата дъска са записани n единици и няколко (поне една) двойки, а втората дъска е празна. За един ход се изтриват две произволни числа от първата дъска, на тяхно място се записва техния сбор, а на втората дъска се записва произведението на изтритите числа. След няколко хода на първата дъска останало само едно число, като се оказало, че удвоеният сбор на числата върху втората дъска е точен квадрат. Да се намерят всички възможни стойности на n.

Решение. Лема. Ако върху първата дъска първоначално числата са $x_1, x_2, \ldots, x_k$, то сборът на числата върху втората дъска в края е равен на

$$\sum_{1 \le i < j \le k} x_i x_j.$$

Доказателство. За $k = 2$ твърдението е вярно. Нека то е вярно за $k - 1$ числа и да разгледаме числата $x_1, x_2, \ldots, x_k$ върху първата дъска.

Без ограничение първият ход е с числата x_1 и x_2. Тогава върху първата дъска ще бъдат записани $k-1$ числа $x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_k$, а върху втората дъска е записано числото $x_1 x_2$. Сега твърдението следва директно от прилагане на индукционното допускане за числата $x_1 + x_2, x_3, \ldots, x_k$.

Нека в началото броят на двойките на първата дъска е m. От Лемата следва, че в края сборът S на числата върху втората дъска е равен на

$$S = \frac{n(n-1)}{2} + 2nm + 2m(m-1).$$

Тогава $2S = n^2 - n + 4nm + 4m^2 - 4m = (n + 2m)^2 - 2(n + 2m) + n$. При $n = 1$ имаме $2S = 4m^2$ и условието е изпълнено. Ако $n > 1$ получаваме

$$(n + 2m - 1)^2 < (n + 2m)^2 - 2(n + 2m) + n < (n + 2m)^2,$$

което означава, че $2S$ не може да е точен квадрат.

Оценяване. 1 т. за верен отговор $n = 1$; 3 т. за твърдението на лемата или еквивалентно на него; 3 т. за случая $n > 1$.

Задача 12.1 Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDV$ с основа $ABCD$. Всички ръбове на пирамидата са равни. Да се намери косинусът на ъгъла между правите AM и CN, където точка M е среда на ръба BV, а точка N е среда на ръба DV.

Решение. Нека точка K в равнината на основата $ABCD$ е такава, че $2AK = BD$ и $AK \parallel BD$. Тогава $AMNK$ е успоредник и и търсим косинусо на ъгъла между KN и NC.

От правоъгълния триъгълник CAK получаваме $KC = \sqrt{AC^2 + AK^2} = a\sqrt{\frac{5}{2}\frac{a\sqrt{10}}{2}}$. Тъй като $AM = KN = CN = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ от косинусовата теорема за триъгълник KCN получаваме: $\cos \sphericalangle CNK = \frac{3+3-10}{2.3} = -\frac{2}{3}$. Следователно търсеният косинус е $\dfrac{2}{3}$.

Оценяване. 2 т. за построяване на успоредна на една от двете прави и свеждане до намиране на косинуса на ъгъл в даден триъгълник; 2 т. за пресмятане на страните на получения триъгълник; 2 т. за намиране на косинуса на ъгъла.

Задача 12.2 Да се докаже, че върховете на параболите $y = x^2+b_ix+c_i$, $i = 1, 2, 3$, лежат на една права, която не е успоредна на оста Oy, тогава и само тогава, когато тези параболи имат обща допирателна.

Решение. Нека правата $y = bx + c$ се допира до параболата $y = x^2 + b_ix + c_i$. Това означава, че уравнението $x^2 + b_ix + c_i = bx + c$ има двоен корен, т.е. $(b_i - b)^2 = 4(c_i - c)$. Полагаме $d = \dfrac{b^2}{4} + c$. Тогава за върха $A_i(x_i^0, y_i^0)$ на параболата имаме, че

$$y_i^0 = c_i - \frac{b_i^2}{4} = -\frac{b_ib}{2} + d = bx_i^0 + d.$$

И така, ако правата $y = bx + c$ се допира до трите параболи, то техните върхове лежат на правата $y = bx + d$.

Обратно, по подобен начин се вижда, че ако върховете на параболите лежат на правата $y = bx + c$, то правата $y = bx + c - \dfrac{b^2}{4}$ се допира до трите параболи.

Оценяване. По 3 т. за $\Rightarrow$ и $\Leftarrow$.

Задача 12.3 Нека n и d са естествени числа, като n е нечетно, d е четно и не се дели на 3 и $n > 4d$. Една аритметична прогресия $n - d, n, n + d$ се нарича *добра*, ако най-големите естествени делители на числата $n - d, n, n + d$, различни от тях самите, също образуват растяща аритметична прогресия (в този ред).

а) Да се докаже, че съществуват безбройно много добри аритметични прогресии.

б) Колко са добрите аритметични прогресии, за които $n < 24^2$?

Решение. Нека втората прогресия е a_1, a_2, a_3.

Тъй като d не се дели на 3, точно едно от числата $n - d, n, n + d$ се дели на 3. Ако $n + d$ не се дели на 3, то $4+(n-d)/3 \le 2d'+a_1 = a_3 \le (n+d)/5$ или $2+n/3 \le d'+a_2 = a_3 \le (n+d)/5$ (d' е разликата на втората прогресия), като и в двата случая получаваме противоречие с условието $n > 4d$. Следователно $a_3 = \frac{n+d}{3}$.

Ако n не се дели на 5, то $a_2 \le \frac{n}{7} < \frac{n+d}{6} = \frac{a_3}{2}$, което означава, че $a_1 < 0$, противоречие. Следователно $a_2 = \frac{n}{5}$.

Нека $a_1 = \frac{n-d}{k}$. Да отбележим, че k трябва да е просто число и $a_1 = 1$ или всички прости делители на a_1 трябва да са поне k. Имаме

$$\frac{n-d}{k} + \frac{n+d}{3} = \frac{2n}{5} \iff 15(n-d) + 5kd = nk \iff 15a_1 + 5d = n.$$

От последното равенство и от $n = ka_1 + d$ следва, че $(k - 15)a_1 = 4d$. Оттук следва, че $k - 15$ се дели на 8. Нека $k = 8t + 15$, където t е естествено число. Тогава $d = 2ta_1$, $n = 5a_1(2t + 3)$. Тези параметри удовлетворяват условията за двете прогресии и остава да осигурим условието a_1 да е най-големият делител на $n - d$.

а) От теоремата на Дирихле следва, че в аритметичната прогресия с общ член $8t+15$ има безбройно много прости числа (това се доказва лесно и директно с имитация на класическото доказателство на Евклид за съществуването на безбройно много прости числа). Първото тях е 23 и дава при $a_1 = 1$ числата 23, 25, 27, и съответно 1, 5, 9. Една безкрайна серия е например $8t + 15, 10t + 15, 12t + 15$, съответно $1, 2t + 3, 4t + 5$.

б) Ако $a_1 > 1$, то $a_1 \ge k \ge 23$ според горното и първата възможност е $a_1 = 23$. Всъщност това е и последно, защото при $a_1 \ge 29$ получаваме $n = 5a_1(2t + 3) \ge 725 > 24^2$. Следователно прогресиите с исканите свойства са тези, за които $k = 8t + 15$ е просто, $n = 10t + 15 < 576$, т.е. $t \le 56$, и още една ($529 = 23^2, 575, 621$, съответно $23, 115, 207$). Тези от първия вид са 22 – от $1 \le t \le 56$ се изключват кратните на 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19. Следователно търсеният брой е 23.

Критерии. (7 точки) 1 т. за $3|n+d$, 1 т. за $5|n$, 1 т. за връзка между a_1, n и d, 1 т. за $k = 8t + 15$, 1 т. за довършване на а), 2 т. за преброяването в б). Ако за а) е посочен само пример за прогресия (с или без използването на теоремата на Дирихле), той се оценява с 2 т.

Задача 12.4 Дадено е естествено число n и две дъски. На първата дъска са записани n единици и няколко (поне една) двойки, а втората дъска е празна. За един ход се изтриват две произволни числа от първата дъска, на тяхно място се записва техния сбор, а на втората дъска се записва произведението на изтритите числа. След няколко хода на първата дъска останало само едно число. Оказало се, че удвоения сбор на числата върху втората дъска е точен квадрат. Да се намерят всички възможни стойности на n.

Решение и оценяване. Виж Задача 11.4.

Задачите са предложени от: 9.1, 9.3, 9.4, 12.3 – Петър Бойваленков, 9.2 – Диана Данова, 10.1, 10.3, 10.4 – Иван Ланджев, 10.2 – Стоян Боев, 11.1, 11.3, 11.4(12.4), 12.1 – Александър Иванов, 11.2 – Емил Колев, 12.2 – Мини Макс.