

Модулни и ирационални уравнения и неравенства

I. Модулни уравнения и неравенства

1. Модул (абсолютната стойност)

Модулът (абсолютната стойност) на едно число може да бъде: $|a| = a$, ако $a \geq 0$ и $|a| = -a$, ако $a \leq 0$. От това определение $\Rightarrow |a| \geq 0$.

2. Модулни уравнения

Нека уравнението да е от вида $|f(x)| = g(x)$ (I.1), където $f(x)$ е произволна функция, а $g(x)$ е или число или функция. Например: $|x - 4| = 2x + 4$, или $|2 - 3x| = 8$. От казаното в т.1 следва, че решенията на (I.1) зависят от знака на $g(x)$:

- ♦ Ако $g(x) < 0$, то (I.1) няма решение;
- ♦ Ако $g(x) \geq 0$, то (I.1) има решение.

Има два начина за решаване на модулни уравнения:

Алгебричен метод

Удобно е този метод да се прилага, когато $g(x) = c$ е положително число. В такъв случай уравнението (I.1) е $|f(x)| = c$, където c е число. (I.2)

Решаваме го по следните начини:

- 1) Повдигаме двете му страни на квадрат и решаваме полученото уравнение;
- 2) Уравнението (I.2) се свежда до решаването на две уравнения:

$$f(x) = c \quad \text{или} \quad f(x) = -c \quad (I.3)$$

Например: $|x - 1| = 4$

$$\text{Начин 1: } (x-1)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 16 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$\text{Начин 2: } x - 1 = 4 \Rightarrow x_1 = 5 \quad \text{или} \quad x - 1 = -4 \Rightarrow x_1 = -3$$

Метод на интервалите:

Може да се прилага при всички модулни уравнения. Удобно е да използваме следното правило:

Правило:

Стъпка А: Решаваме уравнението $f(x) = 0$, за всеки от модулите, участващи в уравнението (I.1). Нека да предположим, че решението на горното уравнение е x_0 .

Стъпка В: Определяме знаците на всеки от модулите вляво и вдясно от x_0 . Ако модулите са повече от един, добре е тези резултати да нанесем в таблица.

Стъпка С: Накъсваме дефиниционната област (Д.М.) на подинтервали, като нанесем числата x_0 и определяме подинтервала отляво да е затворен, а отдясно – отворен (когато лявата страна е $-\infty$ или число, не принадлежащо на Д.М., интервалът отляво не се затваря).

Стъпка D: Решаваме уравнението (I.1) във всеки от подинтервалите като заместим модулите със знаците от таблицата и проверяваме дали получените решения принадлежат на разглеждания подинтервал. Отпадат тези, които не принадлежат.

Стъпка Е: Обобщаваме всички решения.

Запомнете:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \quad (I.4)$$

$$|f(x)|^2 = |f^2(x)| = f^2(x) \quad (I.5)$$

Основни типове задачи

$$\text{Зад. 1: } |x - 3| + |3x + 1| = 10$$

Решение:

$$\text{Стъпка А: } x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3;$$

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Стъпки В и С:

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg ; E-mail: solema@gbg.bg

	$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{10cm}} \\ \hline -\infty \qquad \qquad -1/3 \qquad \qquad 3 \qquad \qquad +\infty \end{array}$									
$x-3$	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+
$3x+1$	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+

Стъпка D: Разглеждаме следните случаи:

1) При $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$: $-(x-3)-(3x+1)=10 \Rightarrow -x+3-3x-1=10 \Rightarrow x=-2$

$-2 \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x=-2$ е решение на даденото уравнение.

2) При $x \in \left[-\frac{1}{3}, 3\right)$: $-(x-3)+(3x+1)=10 \Rightarrow -x+3+3x+1=10 \Rightarrow x=3$, но

$3 \notin \left[-\frac{1}{3}, 3\right) \Rightarrow x=3$ не е решение на даденото уравнение.

3) При $x \in [3, +\infty)$: $(x-3)+(3x+1)=10 \Rightarrow x-3+3x+1=10 \Rightarrow x=3$

$3 \in [3, +\infty) \Rightarrow x=3$ е решение на даденото уравнение.

Стъпка E: От 1), 2) и 3) следва, че решенията на даденото уравнения са:

$x_1 = -2$ и $x_2 = 3$.

Зад.2: $|x^2 - 2x - 3| = |2x - 5| + 1$

Решение:

Стъпка A: $2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 2,5$; $x^2 - 2x - 3 = 0$; $D = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = 2$;

$x_1 = 1 + 2 = 3$ и $x_2 = 1 - 2 = -1$

Стъпки B и C:

$x^2 - 2x - 3$	+	+	+	0	-	-	-	-	0	+	+	
$2x - 5$	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+		

Стъпка D: Разглеждаме следните случаи:

1) При $x \in (-\infty, -1)$: $x^2 - 2x - 3 = -(2x - 5) + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Само $x_2 = -3$ е решение на даденото уравнение.

2) При $x \in \left[-1; \frac{5}{2}\right)$: $-(x^2 - 2x - 3) = -(2x - 5) + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Само $x_1 = 1$ е решение на даденото уравнение.

3) При $x \in \left[\frac{5}{2}; 3\right)$: $-(x^2 - 2x - 3) = 2x - 5 + 1 \Rightarrow x^2 - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{7} \\ x_2 = -\sqrt{7} \end{cases}$

Само $x_1 = \sqrt{7}$ е решение на даденото уравнение.

4) При $x \in [3; +\infty)$: $x^2 - 2x - 3 = 2x - 5 + 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{3} \\ x_2 = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$

Само $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ е решение на даденото уравнение.

Стъпка E: От 1), 2), 3) и 4) следва, че решенията на нашето уравнения са: $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{7}$ и $x_4 = 2 + \sqrt{3}$.

3. Модулни неравенства

Решават се по подобни начини, както и модулните уравнения.

Бележка:

Ако имаме неравенството $|f(x)| < c$, където $c > 0$ е число, то може да се реши и по системата $\begin{cases} f(x) < c \\ f(x) > -c \end{cases}$. (I. 6)

Ако имаме неравенството $|f(x)| > c$, където $c > 0$ е число, то могат да се решат следните две неравенства $f(x) > c$ и $f(x) < -c$ (I. 7)

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

Зад. 3: $|x^2 - 2x - 3| - 2 > |2x - 1|$

Решение:

Стъпка A: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0,5$;

$$x^2 - 2x - 3 = 0; D = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = 2; x_1 = 1 + 2 = 3 \text{ и } x_2 = 1 - 2 = -1$$

Стъпки В и С:

$x^2 - 2x - 3$	+	+	+	0	-	-	-	-	0	+	+
$2x - 1$	-	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+

Стъпка D: Разглеждаме следните случаи:

1) При $x \in (-\infty, -1)$: $x^2 - 2x - 3 - 2 > -(2x - 1) \Rightarrow x^2 - 6 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; +\infty)$

Засичаме с разглеждания интервал от където следва, че решенията на даденото неравенство са $x \in (-\infty; -\sqrt{6})$.

2) При $x \in [-1; \frac{1}{2})$:

$$-(x^2 - 2x - 3) - 2 > -(2x - 1) \Rightarrow x^2 - 4x < 0 \Rightarrow x(x - 4) < 0 \Rightarrow x \in (0; 4)$$

Засичаме с разглеждания интервал от където следва, че решенията на даденото неравенство са $x \in (0; \frac{1}{2})$.

3) При $x \in [\frac{1}{2}; 3)$: $-(x^2 - 2x - 3) - 2 > 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2 < 0 \Rightarrow x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

Засичаме с разглеждания интервал от където следва, че решенията на даденото неравенство са $x \in [\frac{1}{2}; \sqrt{2})$.

4) При $x \in [3; +\infty)$:

$$x^2 - 2x - 3 - 2 > 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 4x - 4 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 2 - 2\sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}; +\infty)$$

Засичаме с разглеждания интервал от където следва, че решенията на даденото неравенство са $x \in (2 + 2\sqrt{2}; +\infty)$.

Стъпка E: От 1), 2), 3) и 4) следва, че решенията на даденото неравенство са:

$$x \in (-\infty; -\sqrt{6}) \cup (0; \sqrt{2}) \cup (2 + 2\sqrt{2}; +\infty).$$

II. Ирационални уравнения и неравенства

1. Ирационална функция

Всяка функция $f(x)$, която се намира под знака на корен, се нарича ирационална. Например:

$$y = \sqrt{f(x)}$$

Ирационалната функция има следните свойства:

♦ **Свойство 1:**

- При четен коренен показател подкоренната функция изпълнява неравенството $f(x) \geq 0$ т.е.

ДМ: $x \in [0; +\infty)$;

- При нечетен коренен показател подкоренната функция $f(x)$ може да бъде

както положителна, така и отрицателна, т.е. ДМ: $\forall x$

- ♦ **Свойство 2:** Когато коренният показател е четно число, графиката на ирационалната функция е само в I квадрант (фиг. 1). Ако коренният показател е нечетно число, графиката на ирационалната функция е симетрична спрямо началото на координатната система (фиг. 2).

- ♦ **Свойство 3:** Независимо от коренния показател, ирационалната функция е растяща, като най-голямата ($\max f(x)$) и най-малката стойност се намират от:

$$\begin{aligned} \min y &= \sqrt{\min_{x \in D.M.} f(x)} \\ \max y &= \sqrt{\max_{x \in D.M.} f(x)} \end{aligned} \quad (II.4)$$

Зад. 1: Да се намери най-голямата стойност на функцията $y = \sqrt{-x^2 + 6x + 7}$

Решение: Функцията y е ирационална. Полагаме $f(x) = -x^2 + 6x + 7$ и от **Свойс-**

тво 1 определяме ДМ: $-x^2 + 6x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1; 7]$. Функцията $f(x)$ е квадратна $\Rightarrow$ графиката и е парабол. Коефициентът пред x^2 е отрицателен $\Rightarrow$ параболата $f(x)$ е

Запомнете:

$$\sqrt{f(x)} \geq 0$$

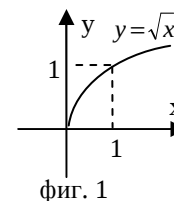
$$(\sqrt{f(x)})^2 = f(x) \quad \text{при } f(x) \geq 0$$

$$\sqrt{(f(x))^2} = |f(x)| \quad \text{за всяко } x$$

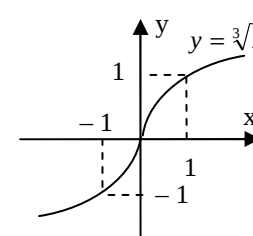
II.1

II.2

II.3



фиг. 1



фиг. 2

с върха нагоре $\Rightarrow f(x)$ има максимум в точката $-\frac{b}{2a}$. Максималната и стойност е:

$$\max_{x \in [-1; 7]} f(x) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f\left(-\frac{6}{-2}\right) = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 + 7 = 16. \text{ Най-голямата стойност на}$$

у намираме, използвайки (II.4): $\max_{x \in [-1; 7]} y = \sqrt{16} = 4.$

2. Ирационални уравнения

Ирационалните уравнения имат вида: $\sqrt{f(x)} = g(x),$ (II.5)

където $f(x)$ и $g(x)$ също могат да съдържат радикали. Пълното ДМ на (II.5) е

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \quad (II. 13)$$

Както за всяко уравнение, така и за ирационалното намирането на ДМ не е задължително. Затова, когато системата (II. 13) е сложна, може да не се решава, но след решаването на уравнение (II.5) получените корени се проверяват.

Бележка:

Както знаем от Свойство 1 и 2 (Фиг. 1 и Фиг. 2), (II. 13) ще е ДМ само когато имаме четен коренен показател. Ако коренният показател е нечетно число, то $f(x)$ и $g(x)$ могат да бъдат както положителни, така и отрицателни, т.е. ДМ на ирационално уравнение с нечетен коренен показател е $\forall x$

Има два начина за решаване на ирационални уравнения:

Правила:

I правило:

Стъпка 1: Ако в (II. 5) имаме корен квадратен, без да търсим ДМ повдигаме двете му страни на квадрат и решаваме полученото уравнение.

Стъпка 2: Непосредствено проверяваме кои от тях са корени и на (II.5).

II правило:

Уравнението (II.5) се свежда до решаване на системата $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$ (II.6)

Бележка:

- Ако в уравнението има няколко корена, то Стъпка 1 в I правило се повтаря докато остане само един корен.
- Неравенството в системата (II.6) определя непълното ДМ на (II.5). Понякога е по-удобно това неравенство да не се решава. То се използва само, за да проверим кои корени на уравнението в системата (II.6) са "чужди" (появяването на "чуждия" корен се обуславя от повдигането на квадрат).

Зад. 2: $\sqrt{10-x} = x+2$

Решение:

Начин 1 (прилагаме I Правило): Без да намираме ДМ повдигаме на квадрат двете страни на даденото уравнение: $10-x = (x+2)^2 \Leftrightarrow 10-x = x^2+4x+4 \Leftrightarrow x^2+5x-6=0$; $D = 25+24 = 49 \Rightarrow \sqrt{D} = 7$; $x_1 = \frac{-5-7}{2} = -6$, $x_2 = \frac{-5+7}{2} = 1$. Непосредствено

проверяваме кои от тези корени са решение на даденото уравнение:

А) За $x = -6$ имаме $\sqrt{10+6} = -6+2 \Leftrightarrow \sqrt{16} = -4 \Leftrightarrow 4 = -4$. Равенството не е вярно, т.е. $x = -6$ не е решение.

В) За $x = 1$ имаме $\sqrt{10-1} = 1+2 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3 \Leftrightarrow 3 = 3$. Равенството е вярно, т.е. $x = 1$ е решение.

От А) и В) следва, че даденото уравнение има само едно решение $x = 1$.

Начин 2 (прилагаме II Правило):

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 10-x = (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ x^2+5x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-2; +\infty) \\ x_1=1; x_2=-6 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Начин 3 (използваме системата (II.6), но не решаваме неравенството в нея):

Отбелязваме $g(x) = x+2$. Повдигаме на квадрат даденото уравнение и получаваме $10-x = (x+2)^2 \Rightarrow x^2+5x-6=0 \Rightarrow x_1=1$ и $x_2=-6$. Сега проверяваме, кои от тези решения изпълняват неравенството от системата (II.6). $g(1) = 1+2 = 3 > 0 \Rightarrow x=1$ е решение на даденото уравнение; $g(-6) = -6+2 = -4 < 0 \Rightarrow x=-6$ не е решение на даденото уравнение.

Начин 4 (намираме пълното ДМ):

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg; E-mail: solema@gbg.bg

Д.М.: $\begin{cases} 10-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 10 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2; 10]$. Повдигаме двете страни на даденото уравне-

ние на квадрат: $10-x = (x+2)^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \in \text{ДМ}$ и $x_2 = -6 \notin \text{ДМ} \Rightarrow$ само $x = 1$ е решение.

Основни типове задачи:

- ◆ Задачи при които подкоренната величина е точен квадрат. Те се свеждат до решаване на модулно уравнение:

Зад. 3: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{4x^2 - 32x + 64} = 9$

Решение: Не намираме Д.М., а преобразуваме горното уравнение по следния начин: $\sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{4(x-4)^2} = 9 \Rightarrow |x-3| + |x-2| + 2|x-4| = 9$. Решенията на това модулно уравнение са $x_1 = 1$ и $x_2 = 5,5$. Чрез непосредствена проверка в ирационалното уравнение проверяваме, че и двете числа са решения. Следователно решенията на нашата задача са: $x_1 = 1$ и $x_2 = 5,5$.

- ◆ Задачи, при които подкоренната величина се допълва до точен квадрат. Те се свеждат до решаване на модулно уравнение:

Зад. 4: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

В подкоренната величина прибавяме и изваждаме 1:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}+1-1} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}+1-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{x-1}+1} -$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{x-1}+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = 2 \Leftrightarrow |\sqrt{x-1}+1| - |\sqrt{x-1}-1| = 2$$

Подмодулната величина на първия модул е винаги положителна, защото: $\sqrt{x-1}+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=-1$ и от (II.1) следва, че това уравнение няма решение, т.е. $\sqrt{x-1}+1 > 0$ за $\forall x$. Затова $|\sqrt{x-1}+1| = \sqrt{x-1}+1$ и горното модулно уравнение се преобразува в следното: $\sqrt{x-1}+1 - |\sqrt{x-1}-1| = 2$. Решаваме го като първо намираме

Д.М.: $x-1 \geq 0 \Rightarrow$ Д.М.: $x \in [-1; +\infty)$. Анулираме израза под знака на модула:

$\sqrt{x-1}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}=1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2$. Накъсваме Д.М. на следните подинтервали:

А) Нека $x \in [-1; 2)$. От $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ определяме интервала $x \in (1; 2)$. В този интервал имаме $\sqrt{x-1}-1 < 0$ и решаваме уравнението:

$\sqrt{x-1}+1 + \sqrt{x-1}-1 = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \Leftrightarrow x-1=1 \Leftrightarrow x=2 \notin [-1; 2) \Rightarrow$ в този интервал даденото уравнение няма решение.

В) Нека $x \in [2; +\infty)$, тогава имаме $\sqrt{x-1}-1 > 0$ и решаваме уравнението:

$\sqrt{x-1}+1 - \sqrt{x-1}-1 = 2 \Leftrightarrow 0x = 0 \Leftrightarrow \forall x \in [2; +\infty)$ е решение.

Обединяваме решенията от А) и В) $\Rightarrow$ Решенията на модулно уравнение са $x \in [2; +\infty)$. Това са всички решения и на даденото ирационално уравнение.

Бележка:

Зад. 4 може да се реши и чрез полагането $\sqrt{x-1} = y \Rightarrow x = y^2 + 1$

- ◆ Чрез полагане:

Зад. 5: $2x^2 + x + \sqrt{2x^2 + x + 4} = 26$

Решение: Прибавяме от двете страни на горното уравнение 4 и получаваме:

$2x^2 + x + 4 + \sqrt{2x^2 + x + 4} = 30$. Полагаме: $\sqrt{2x^2 + x + 4} = y$. Като отчетем (II.1), за у намираме ДМ_y: $y \geq 0$. От полагането получаваме $2x^2 + x + 4 = y^2$, и заместваем в нашето уравнение получаваме: $y^2 + y - 30 = 0$; $y_1 = 5 \in \text{ДМ}_y$, $y_2 = -6 \notin \text{ДМ}_y$. Тогава: $\sqrt{2x^2 + x + 4} = 5$. ДМ: $\forall x$ (защото за неравенството $2x^2 + x + 4 > 0$ имаме $a = 2 > 0$ и $D < 0$). Повдигаме на квадрат двете страни: $2x^2 + x + 4 = 25 \Leftrightarrow x_1 = 3$, $x_2 = -3,5$. Това са и решенията на дадената задача.

- ◆ Уравнения съдържащи корени с различен показател:

Зад. 6: $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{x-5} = 3$

Решение: ДМ: $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Правим полагането: (А): $\begin{cases} \sqrt{x-2} = u, \forall u \geq 0 \\ \sqrt[3]{x-5} = v, \forall v \end{cases}$

решаваме системата: $\begin{cases} x-2 = u^2 \\ x-5 = v^3 \\ u+v = 3 \end{cases}$. Решаваме първите две уравнения чрез събиране:

$$\begin{cases} x-2 = u^2 \\ x-5 = v^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2 = u^2 \\ -x+5 = -v^3 \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^3 = 3 \Rightarrow u = \sqrt{3+v^3} \text{ и заместваем в третото уравнение:}$$

$$\sqrt{3+v^3} + v = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3+v^3} = 3-v \Leftrightarrow 3+v^3 = 9-6v+v^2 \Leftrightarrow (v^3-v^2)+6v-6=0 \Leftrightarrow (v-1)(v^2+6)=0.$$

Това уравнение има само едно решение $v = 1$ (защото $v^2 + 6 = 0$ няма решение).

Понеже не сме намерили ДМ_v трябва да проверим дали $v = 1$ е решение:

$\sqrt{3+v^3} = 3-v \Rightarrow \sqrt{3+1^3} = 3-1 \Leftrightarrow \sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$. Равенството е вярно, т.е. $v = 1$ е решение. Тогава $u = \sqrt{3+v^3} \Leftrightarrow u = \sqrt{3+1} \Leftrightarrow u = 2$. Заместваем в (А) и получаваме:

$\sqrt[3]{x-5} = 1 \Leftrightarrow x-5 = 1^3 \Leftrightarrow x = 6$. Това е и решението на даденото уравнение.

- ◆ Уравнения, съдържащи корени в знаменател:

Зад. 7: $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}} - \sqrt{3x-2} = 1-x$

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg; E-mail: solema@gbg.bg

Решение: ДМ: $3x - 2 > 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ и превеждаме двете страни под общ зна-

менател: $x^2 - 3x + 2 = (1-x)\sqrt{3x-2}$. Лявата страна е квадратна функция, която има

корени $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Затова горното уравнение добива вида:

$$(x-1)(x-2) = (1-x)\sqrt{3x-2} \Rightarrow (x-1)(x-2) + (x-1)\sqrt{3x-2} = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2 + \sqrt{3x-2}) = 0.$$

Решенията на това уравнения са:

А) $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in \text{ДМ};$

В) $x - 2 + \sqrt{3x-2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} = 2 - x$, където $g(x) = 2 - x \Rightarrow 3x - 2 = (2 - x)^2 \Leftrightarrow 3x - 2 = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 2 = 0$; $x_1 = 6$, $x_2 = 1$. При $x_1 = 6$ имаме $g(6) = 2 - 6 = -4 < 0 \Rightarrow x_1 = 6$ не е решение на уравнението В). При $x_2 = 1$ имаме $g(1) = 2 - 1 = 1 > 0 \Rightarrow x_2 = 1$ е решение на уравнението В).

От А) и В) следва, че $x = 1$ е решение на даденото уравнение.

♦ Ирационални уравнения, съдържащи параметър:

Бележка:

Стандартният вид на параметричното уравнение е:

$$\text{коефициент} * X = \text{израз} \quad (\text{II.7})$$

Решава се като се разгледат следните два случая:

А) коефициент = 0. Тогава в зависимост от видът на израз разглеждаме следните два подслучая:

1) ако израз = 0, то решенията на (II.7) са $\forall x$;

2) ако израз $\neq 0$, то уравнението (II.7) няма решения

В) коефициент $\neq 0$. Тогава решенията са: $x = \frac{\text{израз}}{\text{коефициент}}$ (II.8).

Зад. 8: Да се реши уравнението $\sqrt{x^2 + ax - 2x} = x + 1$, където a е реален параметър.

Решение: Първо решаваме ирационалното уравнение по II Правило (II.6). Затова $g(x) = x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ (А) и повдигаме на квадрат

$$(\sqrt{x^2 + ax - 2x})^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + ax - 2x = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow (a-4)x = 1. \text{ Разглеждаме следните два случая:}$$

В) Ако $a - 4 = 0 \Rightarrow a = 4$, уравнението има следния вид: $0 \cdot x = 1$ т.е. при $a = 4$ параметричното уравнение няма решение.

С) Ако $a - 4 \neq 0 \Rightarrow a \neq 4$, параметричното уравнение има решение $x = \frac{1}{a-4}$.

Сега трябва да проверим кои от тези решения са действителни решения на даденото уравнение като заместим в А):

$$x \geq -1 \Rightarrow \frac{1}{a-4} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+a-4}{a-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a-3}{a-2} \geq 0 \Rightarrow a \in (-\infty; 3] \cup (4; +\infty)$$

От В) и С) следва, че:

При $a \in (-\infty; 3] \cup (4; +\infty)$, задачата има едно решение $x = \frac{1}{a-4}$.

При $a \in (3; 4]$, задачата няма решение.

3. Ирационални неравенства

Неравенство, при което неизвестното е под корен, се нарича ирационално. За разлика от уравненията решаването на ирационалните неравенства започва с намирането на ДМ

Основните ирационални неравенства са: $\sqrt{f(x)} < g(x)$ (II.9)

или $\sqrt{f(x)} > g(x)$, (II.10)

където $f(x)$ и $g(x)$ също могат да съдържат радикали.

Неравенство (II.9) се решава по следния начин

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Бележка:

Първите две неравенства в горната система определят ДМ

Неравенство (II.10) се решава като се решат двете системи:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

Съществува общ начин за решаване на уравнения от вида (II.9) и (II.10):

Учебен център "СОЛЕМА"

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg; E-mail: solema@gbg.bg

Общо правило:

Стъпка А: Намираме ДМ;

Стъпка В: Преобразуваме неравенството така, че едната страна да не съдържа корен (например: дясната страна). Означаваме тази страна например с $\psi(x)$;

Стъпка С: Разделяме ДМ на две по следните начини:

С.1: Решаваме неравенството $\psi(x) < 0$ (ако в (II.9) и (II.10) имаме строги неравенства, то тук разглеждаме $\psi(x) \leq 0$) като по този начин намираме нова ДМ₁. Ако имаме неравенството $\sqrt{f(x)} < -$, то нашето неравенство няма решение в ДМ₁, ако имаме неравенството $\sqrt{f(x)} > -$, то решенията на нашето неравенство са $\forall x \in \text{ДМ}_1$;

С.2: Решаваме неравенството $\psi(x) \geq 0$ (ако в (II.9) и (II.10) имаме строги неравенства, то тук разглеждаме $\psi(x) > 0$) като по този начин намираме нова ДМ₂. Повдигаме на квадрат нашето неравенство и го решаваме. Получените решения засичаваме с ДМ₂;

Обединяваме решенията, получени от С.1. и С.2.

Бележка:

Както при ирационални уравнения, така и при ирационални неравенства, затруднения създава повдигането на двете страни на неравенството, само когато степента е четна, защото тогава се получават неравенства, които не са еквивалентни. Затова, ако имаме уравнение или неравенство, съдържащо корен с нечетен показател, за решаването му трябва да повдигнем двете му страни на съответната степен, без да изследваме знака на $\psi(x)$.

Следват избрани задачи от

Основни типове задачи:

Зад. 9: $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1 < \sqrt{x^2}$

Решение: Подкоренните величини са точен квадрат, затова ирационално неравенство се свежда до решаването на модулно неравенство:

$\sqrt{(x-3)^2} - 1 < \sqrt{x^2} \Rightarrow |x-3| - 1 < |x|$. Разглеждаме следните интервали:

А) Нека $x \in (-\infty; 0)$, тогава $|x-3| = -(x-3)$ и $|x| = -x$ и горното неравенство се преобразува по следния начин: $-(x-3)-1 < -x \Rightarrow -x+3-1 < -x \Rightarrow 0.x < -2 \Rightarrow \text{Н.Р.}$, т.е. в този интервал даденото неравенство няма решение.

В) Нека $x \in [0; 3)$, тогава $|x-3| = -(x-3)$ и $|x| = x$ и горното неравенство се преобразува по следния начин: $-(x-3)-1 < x \Rightarrow -x+3-1 < x \Rightarrow 2x > 2 \Rightarrow x > 1$, т.е. в този интервал даденото неравенство има решение $x \in (1; 3)$.

С) Нека $x \in [3; +\infty)$, тогава $|x-3| = (x-3)$ и $|x| = x$ и горното неравенство се преобразува по следния начин: $(x-3)-1 < x \Rightarrow x-3-1 < x \Rightarrow 0.x > -4 \Rightarrow \forall x$, т.е. в този интервал даденото неравенство има решение $x \in [3; +\infty)$.

От А), В) и С) следва, че решенията на даденото неравенство са $x \in (1; +\infty)$.

Зад. 14: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > x - 4$

Решение: Ще решим задачата по двата начина:

Начин 1: Прилагаме Общото правило за решаване на ирационални неравенства:

А) ДМ: $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

В) Неравенството не се нуждае от преобразуване, затова означаваме $\psi(x) = x - 4$.

С) Разглеждаме следните два случая:

С.1) Когато $\psi(x) = x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$, нова дефиниционна област (в която дясната страна е отрицателна) е ДМ₁: $\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \\ x \in (-\infty; 4] \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [1; 4]$. В случая

имаме $\sqrt{x^2 - 3x + 2} > -$. $\Rightarrow$ Даденото неравенство има решение за $x \in (-\infty; 1] \cup [1; 4]$;

С.2) Когато $\psi(x) = x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 4$, новата дефиниционна област (в която дясната страна е положителна) е: ДМ₂: $\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \\ x \in (4; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (4; +\infty)$. Повдигаме

двете страни на неравенство В) на квадрат: $x^2 - 3x + 2 > x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x > \frac{14}{5}$. Засичай-

ки ги с ДМ₂, стигаме до извода, че решенията са: $x \in (4; +\infty)$.

Обединяваме решенията С.1) и С.2), от което следва, че решенията на даденото неравенство са: $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Начин 2: Даденото неравенство е от вида (II.10). Затова $f(x) = x^2 - 3x + 2$ и $g(x) = x - 4$. Прилагаме системите (II.12): $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x - 4 > 0 \\ x^2 - 3x + 2 > x^2 - 8x + 16 \end{cases}$.

Първата система отбелязваме с А), а втората с В). Решаваме А):

Учебен център “СОЛЕМА”

обучение по математика, физика, български и английски език, компютър

адрес: гр.София, ж.к. Надежда, бл. 335

☎: 897 99 54 вечер, г-н Станев; Web страница: www.solema.hit.bg ; E-mail: solema@gbg.bg

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [2; 4]. \text{ Решаваме и В):}$$

$$\begin{cases} x - 4 > 0 \\ 5x > 14 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (4; +\infty). \text{ Обединяваме решенията от системи А) и В) и получаваме ре-}$$

шението на даденото уравнение: $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

Бележка:

От разгледаните примери се вижда, че [Общото правило](#) за решаване на ирационални неравенства е удобно да се прилага, когато в неравенството има повече от един корен (Зад. 12 и Зад. 13) или е параметрично (Зад. 15). Системите (II. 11) и (II. 12) е удобно да се прилагат, когато в неравенството има само един корен (Зад. 14).

Задачи за упражнение:

Следват задачи групирани по сложност. Част от тях са давани на конкурсни изпити или на матури.

За съжаление те са авторски и не се разпространяват свободно. Използват се за подготовка на кандидатстуденти с учител от Учебен център „СОЛЕМА”.

Учебен център „СОЛЕМА” подготвя ученици за кандидатстване във всички университети, а така също и за кандидатстване след 7 клас.

За цените и всичко свързано с подготовката на кандидатстудентите и учениците кандидатстващи след 7 клас по математика и физика, виж www.solema.hit.bg раздел „За нас”.