РЕШЕНИЯ

ПРИЕМЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

УАСГ

13 Юли 2014 г.

Вариант 2

Задача 1. (1 т.) Най – малкото цяло число от дефиниционната област на функцията $f(x)=\lg\left(16^x-\frac{1}{8}\right)$ е

а) -2; б) -1; в) 0; г) 1.

Решение:

$16^x-\frac{1}{8}>0 \Rightarrow 2^{4x}>2^{-3} \Rightarrow x>-\frac{3}{4}$.

Задача 2. (1 т.) За коя от посочените по – долу стойности на x изразът $\sqrt{3}-2\cos 3x$ е равен на нула?

а) x= -2; б) $x=\frac{\pi}{9}$; в) $x=45^\circ$; г) $x=\frac{\pi}{18}$.

Решение:

$\sqrt{3}-2\cos 3x=0 \Rightarrow \cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x=\frac{\pi}{18}$.

Задача 3. (1 т.) В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с дължина на ръба 1, лицето на пълната повърхнина на пирамидата ABB_1D_1 е равно на:

а) 3; б) $3-\sqrt{2}$; в) $1+\sqrt{2}$; г) $\frac{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$.

Решение: Пълната повърхнина е сума от лицата на равностранния $\triangle AB_1D_1$, и правоъгълните триъгълници $\triangle ABB_1$, $\triangle BB_1D_1$, и $\triangle ABD_1$.

Задача 4. (1 т.) Ако $x_{1,2}$ са корените на уравнението $2^{2x}-5.2^x+4=0$, то стойността на изразът $x_1^2+x_2^2-x_1x_2$ е

а) 1; б) 4; в) -9; г) -2.

Решение: След полагането $2^x=y$, лесно се вижда, че $x_1=0$, а $x_2=2$.

Задача 5. (1 т.) Границата $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{8-x}$ е равна на

а) 3; б) $-\dfrac{1}{12}$; в) $\dfrac{1}{3}$; г) 0.

Решение: $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{8-x}=\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{(2-\sqrt[3]{x})(4+2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}$

Всяка задача от 1 до 5 има само един верен отговор, който е посочен в таблицата:

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
В)	Г)	Г)	Б)	Б)

Задача 6. Нека a е реален параметър.

(а) (1,5 т.) Решете уравнението $\log_3(9^x+3a)-\log_3 4=x$.

(б) (1,5 т.) Решете уравнението $\log_3(9^{\sin t}+3a)-\log_3 4=\sin t$ при $a=1$.

(в) (2 т.) За кои стойности на параметъра a уравнението от подусловие (б) има две различни решения в интервала $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$?

Решение: (а) След антилогаритмуване и полагането $3^x=y$ получаваме уравнението $y^2-4y+3a=0$ с допустими стойности (ДС) $y>0$ и $y^2+3a>0$. Ясно е, че последното условие е изпълнено за положителните корени на уравнението.

При $a\le\dfrac{4}{3}$ за корените му получаваме $y_1=2-\sqrt{4-3a}$ и $y_2=2+\sqrt{4-3a}$.

$y_1\in\text{ДС}\Leftrightarrow\sqrt{4-3a}<2$, т.е. за $a>0$, а $y_2\in\text{ДС}$ за всяко $a\le\dfrac{4}{3}$.

Така получаваме:

- при $a\le 0$ уравнението има едно решение $x=\log_3 y_2$;
- при $0<a\le\dfrac{4}{3}$ уравнението има две решения $\log_3 y_1$ и $\log_3 y_2$;
- при $a>\dfrac{4}{3}$ уравнението няма решение.

(б) Аналогично на (а), след полагането $3^{\sin t}=y$ се получава уравнението $y^2-4y+3=0$ с корени 1 и 3, откъдето съответно $\sin t=0,\ t=k\pi$ или $\sin t=1,\ t=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$.

(в) След полагането от (б) се получава

$$(*)\ y^2-4y+3a=0 .$$

Понеже при $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin t \in [-1,1]$, откъдето трябва $3^{-1} \le 3^{\sin t} \le 3^{1}$ ($3 > 1$). Следователно се търсят тези стойности на a, за които уравнението (*) има два различни корена y_1 и y_2 от интервала $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$, които имат вида, посочен в (а). Това изискване води до системата неравенства

$$\left| \begin{array}{l} 4-3a>0 \\ 2+\sqrt{4-3a} \le 3 \\ 2-\sqrt{4-3a} \ge \frac{1}{3} \end{array} \right.$$

Решенията на тази система са числата от интервала $\left[1, \frac{4}{3}\right)$.

Разбира се до същия резултат се стига, ако се използват факти за разположение на корените на квадратно уравнение. Така ако означим лявата страна на (*) с $f(y)$ за a ще получим системата

$$\left| \begin{array}{l} 4-3a>0 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) \ge 0 \\ f(3) \ge 0 \\ \left(\frac{1}{3} \le 2 \le 3\right) \end{array} \right.$$

Задача 7. Четириъгълникът $ABCD$ е трапец с основи AB и CD.

(а) (2т.) Пресечната точка на ъглополовящите на $\sphericalangle DAB$ и $\sphericalangle CDA$ е E, а тази на ъглополовящите на $\sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle BCD$ е F. Докажете, че точките E и F лежат върху правата, определена от средната отсечка на трапеца и че разстоянието между тях е равно на $\frac{|AB+CD-BC-AD|}{2}$

(б) (3т.) Известно е, че E и F съвпадат. Докажете, че в трапеца може да се впише окръжност. Ако трапецът е равнобедрен и $AB = 4CD$, намерете отношението на дължините на радиусите на вписаната и на описаната за трапеца окръжности.

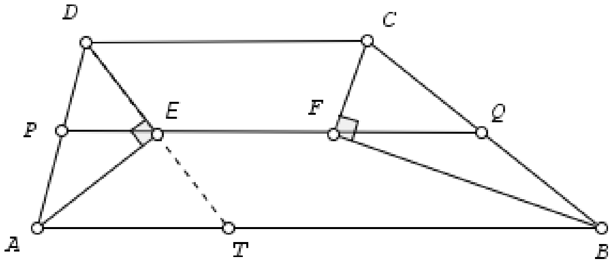
Решение: (а) От $\triangle AED$ имаме

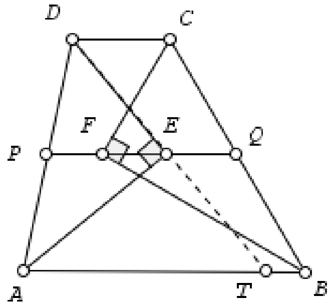
$\sphericalangle AED = 180^\circ - \frac{1}{2}(\sphericalangle BAD + \sphericalangle ADC) = 180^\circ - \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ$.

Понеже $\sphericalangle ATD = \sphericalangle TDC$ (кръстни ъгли) следва, че $AT = AD$. Тогава точка E е среда на DT, откъдето следва, че точка E лежи на правата, определена от средната отсечка PQ. Аналогично, F е от тази права. Тъй като PE е медиана към хипотенузата в правоъгълен триъгълник, $2PE = AD$ и аналогично, $2FQ = CD$. Тогава

$2EF = 2PQ - 2PE - 2QF = AB + CD - AD - BC$ за черт.1 (отляво) и

$2EF = 2PE + 2QF - 2PQ = AD + BC - AB - CD$ за черт 1 (отдясно).

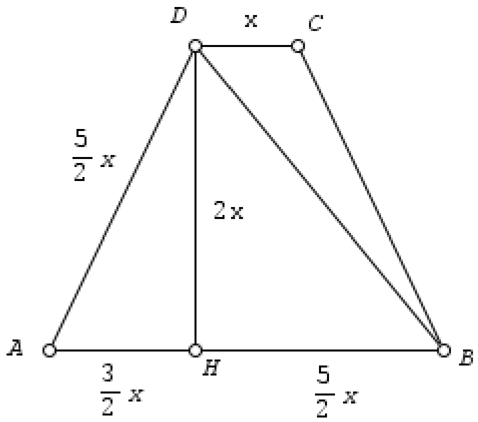




Черт. 1

(б) Щом $E \equiv F$, E е пресечна точка на ъглополовящите на ъглите на трапеца. Следва, че E център на вписаната в трапеца окръжност. Нека $|CD| = x$. Да означим с r и R дължините на радиусите на вписаната и на описаната за трапеца окръжности. От $\triangle AHD$ имаме $(2r)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 = \left(\frac{5}{2}x\right)^2$, откъдето $r = x$. За R имаме $R = \dfrac{AB.BD.AD}{4.\frac{1}{2}AB.DH} = \dfrac{BD.AD}{4x}$.

От $\triangle BHD$: $BD^2 = 4x^2 + \left(\frac{5}{2}x\right)^2$, $BD = \dfrac{\sqrt{41}}{2}x$. Тогава $R = \dfrac{5\sqrt{41}}{16}x$. Следователно $\dfrac{r}{R} = \dfrac{16}{5\sqrt{41}}$.

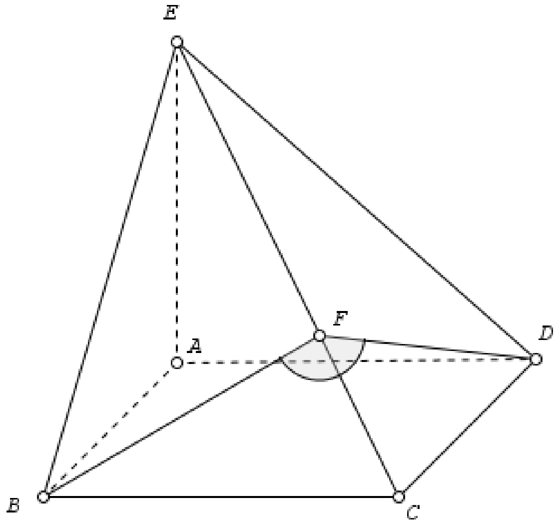


Черт. 2

Задача 8. Основата на пирамида с връх E е квадратът $ABCD$. Околният ръб AE е перпендикулярен на основата и $AE = CD$.
(а) (1 т.) Докажете, че $\triangle BCE \cong \triangle DCE$ и $\sphericalangle CBE = \sphericalangle CDE = 90^\circ$.
(б) (2 т.) Докажете, че двустенният ъгъл между равнините (BCE) и (DCE) е равен на 120°.
(в) (2т.) Да се намерят ъгълът и разстоянието между правите BE и AK, където K е средата на ръба CE, ако $AE = a$.

Решение:
(а) Тъй като $BC \perp AB$ по теоремата за трите перпендикуляра и $BE \perp BC$. Аналогично $DE \perp CD$. Тогава триъгълниците BCE и DCE се еднакви като правоъгълни с по един равен катет и обща хипотенуза.

(б) Нека $BF \perp CE\,(F \in CE)$. От (а) и $DF \perp CE$. Тогава търсеният ъгъл е $\sphericalangle BFD$. Ако основният ръб (който е равен и на AE) е a, от съответните правоъгълни триъгълници последователно се получава $BF = a\sqrt{2}, CE = a\sqrt{3}, BF = DF = \frac{a\sqrt{6}}{3}, BD = a\sqrt{2}$. Сега с косинусовата теорема за $\triangle BDF$ се получава, че $\sphericalangle BFD$ има косинус $-\frac{1}{2}$, т.е. е равен на 120°.



(в) Нека $KL \parallel BE(L \in BC)$. Тогава търсения ъгъл е $\sphericalangle AKL$. Имаме: $AK = \frac{1}{2}CE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (медиана към хипотенуза), $KL = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а от $\triangle ABL$, $AL = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Отново с косинусова теорема за $\triangle ALK$ се получава , че $\sphericalangle AKL$ има косинус 0, т.е., че е прав.

По-нататък, ако $KN \perp BE\,(N \in BE)$, то $KN \parallel BC$ и N е среда на BE, откъдето и $AN \perp BE$, т.е. височината h_N през върха N в $\triangle AKN$ е оста на двете прави.

Сега $KN = \frac{a}{2}, AN = \frac{1}{2}BE = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и понеже $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $\triangle AKN$ е правоъгълен и $h_N = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.