Великотърновски университет „Св. св. Кирил и Методий“

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

07 юли 2014 г.

ТРЕТА ТЕМА

Задача 1. Да се решат уравненията:

1.1. $\dfrac{4}{x^2+x+1} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{8x-1}{x^3-1}$;

1.2. $4\log_2^2 x + 4\log_2 x - 3 = 0$;

1.3. $4^{x+\frac{1}{2}} + 6.2^{x-1} - 2 = 0$.

Задача 2. Дадено е уравнението $x^2+ax+b=0$, където a и b са реални параметри. Да се намерят:

2.1. стойностите на a и b, за които уравнението има два реални корена x_1 и x_2, за които $x_1+x_2 = x_1x_2$ и стойността на израза

$$P = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 4x_1x_2 + 2014$$

е минимална;

2.2. корените на даденото уравнение, ако a и b са съответно четвъртият и единадесетият член на аритметичната прогресия $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_4 - a_2 = 10$, а сумата от първите пет члена е $S_5 = 60$.

Задача 3. Диагоналите на равнобедрен трапец $ABCD$ с бедро $BC = 14$ см се пресичат в точка O, точките M и N са среди съответно на AO и BC, като $MN = BN$.

3.1. Да се намерят $\sphericalangle BMC$ и $\sphericalangle AOB$.

3.2. Ако $CO : OA = 3 : 5$, да се намерят основите и лицето на трапеца.

Задача 4. Даден е четириъгълник $ABCD$, в който може да се впише окръжност. Известно е, че $CD = 15$ см, $BD = 13$ см, $\sphericalangle BAD = 90^\circ$, $\sphericalangle BCD = 60^\circ$.

4.1. Да се намерят страните на четириъгълника и радиусът на вписаната в него окръжност.

4.2. Да се намери обемът на пирамидата $ABCDM$, ако височината ѝ е $MH = 16$ см.

НА ВСИЧКИ КАНДИДАТ-СТУДЕНТИ ПОЖЕЛАВАМЕ УСПЕХ!

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
7 юли 2014 г.
ТРЕТА ТЕМА – ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

Задача 1. Да се решат уравненията:

1.1. Тъй като $x^2 + x + 1 > 0$ за всяко реално число x и $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, то областта от допустимите стойности за неизвестното x в даденото рационално уравнение е ОДС : $x \neq 1$. Тогава

$$\frac{4}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{8x - 1}{x^3 - 1} \iff x^2 + 5x + 4 = 0.$$

Корени на полученото квадратно уравнение са числата $-1 \in$ ОДС и $-4 \in$ ОДС. Следователно решения на даденото рационално уравнение са $x_1 = -1$ и $x_2 = -4$.

1.2. Областта от допустимите стойности за неизвестното x в даденото логаритмично уравнение е ОДС : $x > 0$. Като положим $y = \log_2 x$, получаваме $4y^2+4y-3 = 0$. Корени на полученото квадратно уравнение са числата $y_1 = -\dfrac{3}{2}$ и $y_2 = \dfrac{1}{2}$. Следователно решения на даденото логаритмично уравнение са $x_1 = 2^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ и $x_2 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.

1.3. Като положим $y = 2^x > 0$, получаваме

$$2y^2 + 3y - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = -2 < 0,\ y_2 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow x = -1.$$

Задача 2. Дадено е уравнението $x^2+ax+b = 0$, където a и b са реални параметри.

2.1. За да има два реални корена x_1 и x_2, е необходимо $a^2 - 4b \geq 0$. Като използваме формулите на Виет, получаваме $x_1+x_2 = -a$, $x_1x_2 = b$. Тъй като $x_1+x_2 = x_1x_2$, то $-a = b$. Тогава $a^2 - 4b = b^2 - 4b \geq 0$ при $b \leq 0$ или $b \geq 4$. Освен това

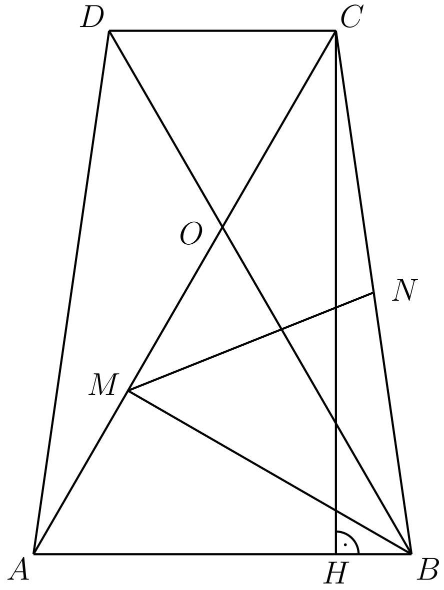
$$P = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + 2x_2 + 4x_1x_2 + 2014 = (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) + 2x_1x_2 + 2014$$

$$\Rightarrow P = a^2 - 2a + 2b + 2014 = b^2 + 4b + 2014 = (b + 2)^2 + 2010.$$

Следователно минималната стойност на P е 2010 и тя се достига при $b = -2 < 0$. В този случай $a = 2$ и $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

2.2. Нека d е разликата на разглежданата аритметична прогресия. Тогава $a_4 - a_2 = 2d = 10$, а $S_5 = 5a_1 + 10d = 60$. Следователно $d = 5$ и $a_1 = 2$, оттук $a_4 = 17$, $a_{11} = 52$. Уравнението $x^2 + 17x + 52 = 0$ има два реални корена $x_1 = -4$ и $x_2 = -13$.

Задача 3.



3.1. Тъй като $MN = BN = CN$, $\triangle BMC$ е правоъгълен и $\sphericalangle BMC = 90^\circ$. Оттук следва, че BM е височина и медиана в $\triangle ABO$, което доказва, че $\triangle ABO$ е равнобедрен и $BO = BA$. Тъй като трапецът е равнобедрен, то $BO = AO$, следователно $\triangle ABO$ е равностранен и $\sphericalangle AOB = 60^\circ$.

3.2. За диагонала AC имаме

$$AC = AO + OC = \frac{8}{5}AO = \frac{8}{5}AB.$$

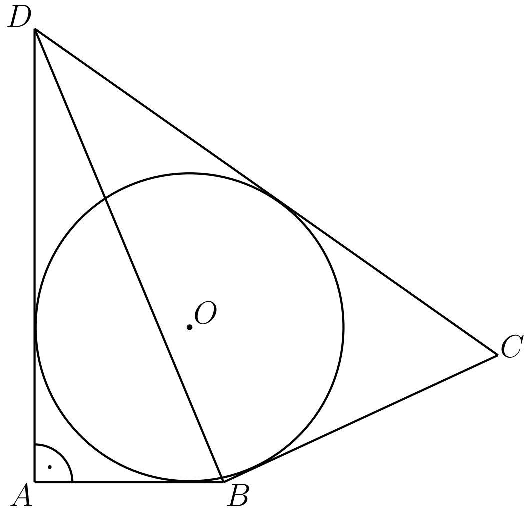
По косинусовата теорема за $\triangle ABC$ получаваме

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 60^\circ \;\Rightarrow 14^2 = AB^2 + \frac{64}{25}AB^2 - \frac{8}{5}AB^2 = \frac{49}{25}AB^2.$$

Оттук $AB = 10$ см, $CD = OC = \dfrac{3}{5}AB = 6$ см, $AC = \dfrac{8}{5}AB = 16$ см. За височината на трапеца получаваме $CH = AC\sin 60^\circ = 8\sqrt{3}$ см. Следователно

$$S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2}CH = 64\sqrt{3}\text{ см}^2.$$

Задача 4.



4.1. По косинусовата теорема за $\triangle BCD$ получаваме

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.\cos 60^\circ \ \Rightarrow 13^2 = BC^2 + 15^2 - 15BC$$

$$\Rightarrow BC^2 - 15BC + 56 = 0.$$

Следователно $BC = 8$ см или $BC = 7$ см. Тъй като в четириъгълника може да се впише окръжност, то $AB + CD = BC + AD$, а от правоъгълния триъгълник BAD по Питагоровата теорема $BD^2 = AB^2 + AD^2$.

1) Ако $BC = 8$, то $AD = AB + 7$ и тогава

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + (AB+7)^2 \ \Rightarrow 2AB^2 + 14AB - 120 = 0 \ \Rightarrow AB = 5 \text{ см}.$$

За лицето на четириъгълника имаме

$$S_{ABCD} = A_{ABD} + S_{BCD} = 30 + 30\sqrt{3} = r\frac{AB + BC + CD + DA}{2} = 20r.$$

Следователно $r = \dfrac{3}{2}(1+\sqrt{3})$ см.

2) Ако $BC = 7$, то $AD = AB + 8$ и тогава

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + (AB+7)^2 \ \Rightarrow AB = -4 + \frac{\sqrt{274}}{2} \text{ см}.$$

За лицето на четириъгълника имаме

$$S_{ABCD} = A_{ABD} + S_{BCD} = \frac{105(1+\sqrt{3})}{4} = r\frac{AB + BC + CD + DA}{2} = 20r.$$

Следователно $r = \dfrac{21}{16}(1+\sqrt{3})$ см.

4.2. Пресмятаме

$$V_{ABCDM} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.MH = \frac{30(1+\sqrt{3})}{3}\cdot 16 = 160(1+\sqrt{3}) \text{ см}^3, \text{ или}$$

$$V_{ABCDM} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.MH = \frac{105(1+\sqrt{3})}{12}\cdot 16 = 140(1+\sqrt{3}) \text{ см}^3.$$

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

7 юли 2014 г.

ТРЕТА ТЕМА – ОТГОВОРИ, ТОЧКИ, УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

Задача 1.

- $\boxed{\textbf{1.1.}}$ – $\boxed{\textbf{1,5 т.}}$: $x_1 = -1, x_2 = -4$;
- $\boxed{\textbf{1.2.}}$ – $\boxed{\textbf{1,5 т.}}$: $x_1 = \sqrt{2}/4, x_2 = \sqrt{2}$;
- $\boxed{\textbf{1.3.}}$ – $\boxed{\textbf{1 т.}}$: $x = -1$.

==

Задача 2.

- $\boxed{\textbf{2.1.}}$ – $\boxed{\textbf{2 т.}}$: $a = 2, b = -2$;
- $\boxed{\textbf{2.2.}}$ – $\boxed{\textbf{2 т.}}$: $x_1 = -4, x_2 = -13$.

==

Задача 3.

- $\boxed{\textbf{3.1.}}$ – $\boxed{\textbf{1,5 т.}}$: $\sphericalangle BMC = 90^\circ, \sphericalangle AOB = 60^\circ$;
- $\boxed{\textbf{3.2.}}$ – $\boxed{\textbf{2,5 т.}}$: $AB = 10$ см, $CD = 6$ см, $S = 64\sqrt{3}$ см^2.

==

Задача 4.

- $\boxed{\textbf{4.1.}}$ – $\boxed{\textbf{3 т.}}$: $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см, $r = 3(1+\sqrt{3})/2$ см;

  или $AB = -4 + \frac{\sqrt{274}}{2}$ см, $BC = 7$ см, $AD = 4 + \frac{\sqrt{274}}{2}$ см, $r = \frac{21(1+\sqrt{3})}{16}$ см;
- $\boxed{\textbf{4.2.}}$ – $\boxed{\textbf{1 т.}}$: $V = 160(1+\sqrt{3})$ см^3 или $V = 140(1+\sqrt{3})$ см^3.

==

• Всяко подусловие се оценява по дадената точкова схема с точност до $0,25$ от точката.

• Когато сумата (Σ) от точките от всички задачи е число от вида $N,50$ или $N,75$, същата се закръглява в полза на кандидат-студента, т.е. $\Sigma = N + 1$ точки.

• Всеки проверяващ формира оценка по формулата $\boxed{\text{ОЦ.} = 2 + \frac{\Sigma}{4}}$.

• Крайната оценка е средно аритметичното от оценките на двамата проверяващи, когато разликата между последните не е по-голяма от $0,50$. При разлика между оценките над $0,50$, работата се разглежда от арбитър. Оценката на арбитриращия е окончателна.

• Всички работи, оценени с **отличен**, задължително се арбитрират.

==

Председател на изпитна комисия: /проф. дмн Ст. Буюклиева/