УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул.”Хр. Смирненски” №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

К О Н К У Р С Е Н И З П И Т
П О М А Т Е М А Т И К А

13 ЮЛИ 2015 ГОДИНА

ПЪРВИ ВАРИАНТ – ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

1. Решение на неравенството $\sin\varphi\cos\varphi \le 0$ е

а) $\varphi \in \left(0,180^\circ\right)$ б) $\varphi \in \left(90^\circ,270^\circ\right)$ в) $\varphi \in \left(90^\circ,180^\circ\right)\bigcup\left(270^\circ,360^\circ\right)$ г) $\varphi \in \left(0^\circ,90^\circ\right)\bigcup\left(180^\circ,270^\circ\right)$

Коментар: *Очевидно знаците на* $\sin\varphi$ *и* $\cos\varphi$ *трябва да са различни, а това е възможно само ако* φ *се намира в II или IV квадрант. Отговор: в)*

2. Ако отношението на лицата на основите на пресечена пирамида е 1:2, то отношението на периметрите е

а) $1:4$ б) $1:1$ в) $1:\sqrt{2}$ г) $\sqrt{2}:\sqrt{3}$

Коментар: *Ако отношението на лицата на подобни фигури е* λ*, то отношението на линейните им елементи е* $\sqrt{\lambda}$*. Отговор: в)*

3. Страните на $\triangle ABC$ са $AB=2$, $BC=3$ и $CA=4$. Центърът на описаната окръжност лежи

а) вътре в $\triangle ABC$ б) извън $\triangle ABC$ в) на страната AB г) на страната AC

Коментар: *Центърът на описаната окръжност е разположен извън триъгълника само когато някой от ъглите му е тъп (защо?). Тъй като* $\cos\left(\sphericalangle ABC\right) = \dfrac{2^2+3^2-4^2}{2.2.3} < 0$*, то* $\sphericalangle ABC > 90^\circ$*. Отговор: б)*

4. Първите четири члена на редицата $a_n = 2^{\frac{n}{2}}\sin\dfrac{n\pi}{4}$, $n=1,2,3,\ldots$ са:

а) $\dfrac{1}{2}, 2, 2, 0$ б) $\dfrac{1}{2}, \sqrt{2}, 2, 0$ в) $1, \sqrt{2}, 2, \dfrac{1}{2}$ г) друг отговор

Коментар: *При n=1 се получава* $a_1 = 2^{\frac{1}{2}}\cos\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 1$*, което означава, че а) и б) не са правилните отговори. След това полагаме n=4 и получаваме, че* $a_4 = 0$*. Отговор: г)*

5. Разстоянието между върха на параболата с уравнение $y = 2x^2 - 4x + 7$ и оста Ox е равно на:

а) 3 б) -4 в) 4 г) 5

Коментар: *Върхът на параболата с уравнение* $y = ax^2 + bx + c$ *има координати* $\left(x_0, y(x_0)\right)$, *където* $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$. *Търсеното разстояние е равно на* $\left|y(x_0)\right|$. *Отговор: г)*

6. (5 т.) Дадена е функцията $f(x) = (m+5)x^2 - (2m+6)x + m + 1$,
където $m \neq -5$ е реален параметър.
а) (1 т.) За кои стойности на m уравнението $f(x) = (\lg m + x)(2^m - x)$ има корен $x = 1$?
б) (2 т.) За кои стойности на m за корените на уравнението $f(x)=0$ е изпълнено неравенството $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} < 2$?

в) (2 т.) За кои стойности на m уравнението $\dfrac{1}{3}x^3 f''(x) - f'(x) = 0$ има три различни реални корена?

Решение:

а) *Тъй като* $f(1) = 0$, *то* $0 = (\lg m + 1)(2^m - 1)$. *Значи* $\lg m + 1 = 0$ *или* $2^m - 1 = 0$. *За m се получава съответно* $m = \dfrac{1}{10}$ *или m=0. Сега остава да се съобрази, че m не може да е 0 (защо?).*

б) *От решението на а) знаем, че* $x_1=1$ *е корен на* $f(x) = 0$ *при всяко m. От формулите на Виет следва, че другият корен е* $x_2 = \dfrac{m+1}{m+5}$. *Значи* $\dfrac{m+5}{m+1} + \dfrac{m+1}{m+5} < 2$. *Разбира се, последното неравенство допуска напълно стандартно решение. По – краткият начин е да положим* $\dfrac{m+1}{m+5} = t$; *получава се* $t + \dfrac{1}{t} < 2;\ t + \dfrac{1}{t} - 2 < 0;\ \dfrac{(t-1)^2}{t} < 0$. *Окончателно получваме t<0;* $\dfrac{m+1}{m+5} < 0$ *и* $m \in (-5, -1)$.

в) $f''(x) = 2(m+5)$ *и* $f'(x) = 2(m+5)x - (2m+6)$. *Заместваме и се получава*
$\dfrac{1}{3}x^3 f''(x) - f'(x) = \dfrac{1}{3}x^3 2(m+5) - \left(2(m+5)x - (2m+6)\right) = \dfrac{2}{3}x^3(m+5) - 2(m+5)x + 2m + 6$. *След това не е лошо да се съобрази, че, ако P(x) е полином от трета степен, то уравнението P(x)=0 има три различни решения точно когато уравнението* $P'(x) = 0$ *има два различни корена* x_1 *и* x_2 *и освен това* $P(x_1)P(x_2) < 0$ *(защо?).*

7. (5 т.) В четириъгълника $ABCD$ страните AB и CD са успоредни. Около $ABCD$ е описана окръжност с център O и радиус R. Дадено е, че $\measuredangle AOB = \varphi,\ \measuredangle BOC = 90^0$.

а) (1 т.) Пресметнете лицето на четириъгълника.

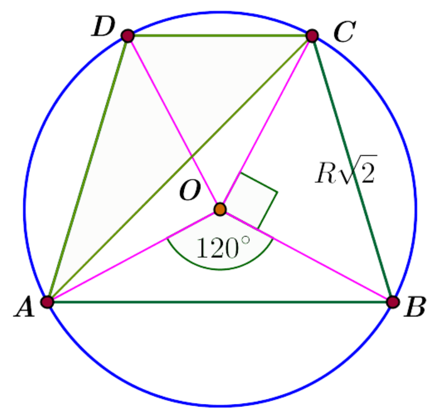
б) (2 т.) За коя стойност на φ е изпълнено $AB=\sqrt{3}R$? За тази стойност на φ пресметнете лицето на $\triangle ACD$.

в) (2 т.) Докажете, че $AB+CD\le R\sqrt{8}$. За коя стойност на φ се достига равенство? Определете вида на четириъгълника в този случай.

Решение: $ABCD$ *е равнобедрен трапец и центърът* O *е вътрешна точка за него (защо?).*

а) $S=S_{AOD}+S_{DOC}+S_{COB}+S_{BOA}=2.\dfrac{R^2}{2}+\dfrac{R^2}{2}\sin\varphi+\dfrac{R^2}{2}\sin(180^0-\varphi)=R^2(1+\sin\varphi)$.

б) *Вижда се от* $\triangle AOB$, *че* $AB=\sqrt{2R^2-2R^2\cos\varphi}=2R\sin\dfrac{\varphi}{2}$ *(косинусова теорема). Ако* $\varphi=120^0$, *то* $\measuredangle COD=60^0$ *и имаме*



$$S_{ACD}=S_{AOD}+S_{DOC}-S_{AOC}=\frac{R^2}{2}+\frac{R^2\sqrt{3}}{4}-\frac{R^2}{2}\sin 150^0=\frac{R^2}{4}(1+\sqrt{3}).$$

в) *Както в подусловие б) получаваме, че* $CD=2R\cos\dfrac{\varphi}{2}$. *Значи*

$AB+CD=2R\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}+\cos\dfrac{\varphi}{2}\right)=2R\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}-45^\circ\right)\le R\sqrt{8}$. *Ясно е, че равенство се получава, ако* $\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}-45^\circ\right)=1$, *от където очевидно следва, че* $\varphi=90^\circ$ *и ABCD е квадрат.*

8. (5 т.) Дадена е триъгълна пирамида $ABCD$. Стените ABC и ABD са равностранни триъгълници със страна *m*, като двустенният ъгъл между тях е α.

а) (1 т.) Пресметнете обема на пирамидата.

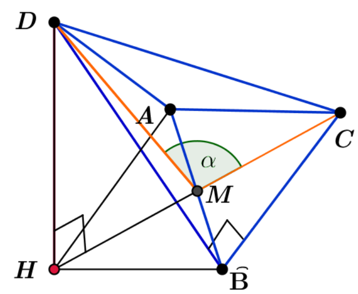
б) (2 т.) При $m=1$ пресметнете косинуса на α, за който пълната повърхнина на пирамидата е максимална.

в) (2 т.) Пресметнете ъгъла и разстоянието между правите AB и CD.

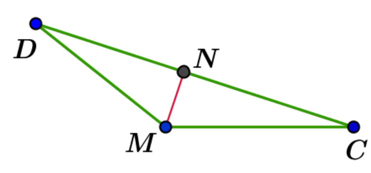
Решение: *а) Ако* DH *е височината на пирамидата, а* M *е средата на* AB*, то апотемата* $DM = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}$. *Както във всяка пирамида, височината DH на пирамидата е равна на* $DM\sin\alpha$*, където DM е апотема на някоя околна стена, а* α *е двустенният ъгъл с основата. В конкретния случай* $DH = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$*, откъдето намираме* $V = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}.DH = \dfrac{m^3}{8}\sin\alpha$ *(да напомним, че основата е даден по условие триъгълник).*

б) *Пълната повърхнина на пирамидата е максимална, когато* $\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = 90^0$. *Тогава* $CD = m\sqrt{2}$ *и от равнобедрения триъгълник* CDM *намираме* $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$*, откъдето*

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{3}$$ *(ъгъл* α *е тъп).*



в) *Ъгълът е прав (теорема за 3-те перпендикуляра). Търсеното разстояние* d *може да се намери като височината MN на триъгълника DMC (защо?).*



Той е равнобедрен, защото DM=MC=$\dfrac{m\sqrt{3}}{2}$ *са височини в равностранните триъгълници ABC и ABD. Ъгълът DMC по условие е равен на* α. *Значи* $d = MN = \dfrac{m\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$.