УНИВЕРСИТЕТ
ПО АРХИТЕКТУРА
СТРОИТЕЛСТВО
И ГЕОДЕЗИЯ

бул."Хр. Смирненски" №1, София 1046,
Р. България
тел.: (02) 963-52-45, факс: (02)865 68 63
e-mail: aceadm@uacg.bg; http://www.uacg.bg

К О Н К У Р С Е Н И З П И Т
П О
М А Т Е М А Т И К А

15 ЮНИ 2018 ГОДИНА

Вариант 1

Задача 1. (1 т.) Единадесетият член на аритметична прогресия е равен на 5. Тогава сумата на първите 21 нейни членове е:

а) 90; б) 95; в) 105; г) 110.

Решение: $S_{21} = a_{11}.21 = 105$

Задача 2. (1 т.) Периметърът на правоъгълен триъгълник с дължини на радиусите на описаната и вписаната окръжности 5 и 2 е равен на:

а) 20; б) 22; в) 32; г) 24.

Решение: За правоъгълен триъгълник използваме равенствата $c = 2R$ и $a + b = 2R + 2r$.

Задача 3. (1 т.) Ако $x = \frac{1}{10}$ е корен на уравнението $\sqrt{\log_x 10 + 1} + \lg x = a^2 - 2a$, то:

а) $a = 0$; б) $a = 2$; в) $a = 1$; г) $a \in \{0, 2\}$.

Решение: $\log_{\frac{1}{10}} 10 = \lg \frac{1}{10} = -1$.

Задача 4. (1 т.) Разстоянието от върха на параболата $y = x^2 + 10x$ до началото на координатната система е:

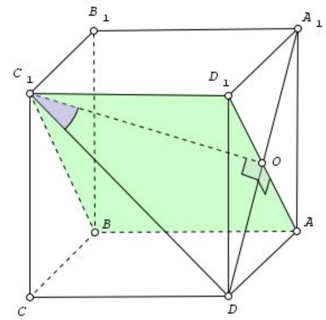
а) $\sqrt{600}$; б) 30; в) $5\sqrt{26}$; г) 5.

Решение: Върхът на параболата има абсциса $-\frac{b}{2a} = -5$ и съответно ордината -25.

Задача 5. (1 т.) В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ъгълът между правата C_1D и равнината (ABC_1D_1) е:

а) 45°; б) 90°; в) 30°; г) 60°.

Решение:



Тъй като $DA_1 \perp AB$ и $DA_1 \perp AD_1$, то търсеният ъгъл е $\sphericalangle OC_1D$, където O е пресечната точка на диагоналите на стената ADD_1A_1. Понеже в правоъгълния $\triangle DC_1O$ $DO = \frac{1}{2}DC_1$ този ъгъл е 30°.

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
В	Г	В	В	В

Задача 6. (5т.) Дадено е уравнението

$$m\cos 2x + (m+1)\sin x = \cos^2 x,$$

където m е параметър.

а) (1 т.) За кои стойности на параметъра m уравнението има корен $x = \frac{\pi}{6}$?

б) (2 т.) Да се реши уравнението за $m = 1$.

в) (2 т.) За кои стойности на параметъра m уравнението има две различни решения в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$?

Решение: а) При $x = \frac{\pi}{6}$ получаваме $m = \frac{1}{4}$.

б) За $m = 1$ получаваме уравнението $\sin^2 x - 2\sin x = 0$ с решения $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

в) След преобразуване и полагане $y = \sin x$ получаваме уравнението

$$(1-2m)y^2 + (m+1)y + m - 1 = 0.$$

Исканото условие за корените на даденото уравнение е равносилно на условието квадратното уравнение да има два различни корена в интервала $(-1,1)$. Това условие се удовлетворява от тези m, които са решение на системата:

$$\left|\begin{array}{l} 9m^2 - 10m + 5 > 0 \\ (1-2m)(1+2m) < 0 \\ 1-2m > 0 \\ -1 < \dfrac{m+1}{2(2m-1)} < 1. \end{array}\right.$$

Окончателно $m \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Задача 7. (5т.) Даден е $\triangle ABC$ с остър ъгъл α при върха A. Нека m е разстоянието от центъра на описаната му окръжност до страната BC.
а) (2 т) Да се намерят страната BC и радиусът на описаната му окръжност.
б) (2 т.) Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако ъгълът при върха B е β.
в) (1 т.) Да се изразят чрез α ъглите на $\triangle ABC$, ако лицето му като функция на β е възможно най-голямо.

<u>*Решение:*</u> а) Нека точката O е центърът на описаната около $\triangle ABC$ окръжност. Построяваме $OD \perp BC$ $(D \in BC)$. Тогава $OD = m$ и $\sphericalangle BOC = 2\alpha$ (черт. 1). Сега от правоъгълния $\triangle COD$ получаваме $BC = 2m\,\mathrm{tg}\alpha$ и $R = \dfrac{m}{\cos\alpha}$.

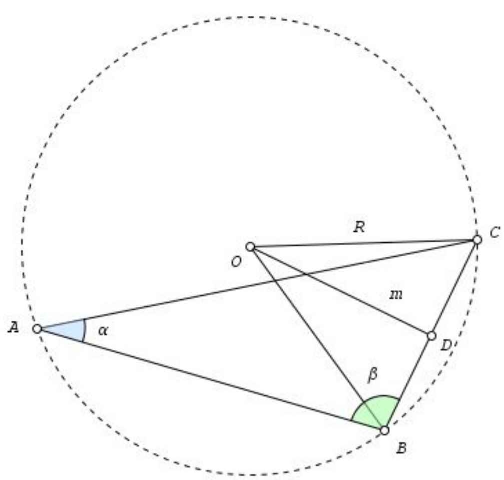
б) От формулата за лице на триъгълник $S = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$ получаваме

$$S_{\triangle ABC} = \frac{2m^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\alpha+\beta)}{\cos^2\alpha}.$$

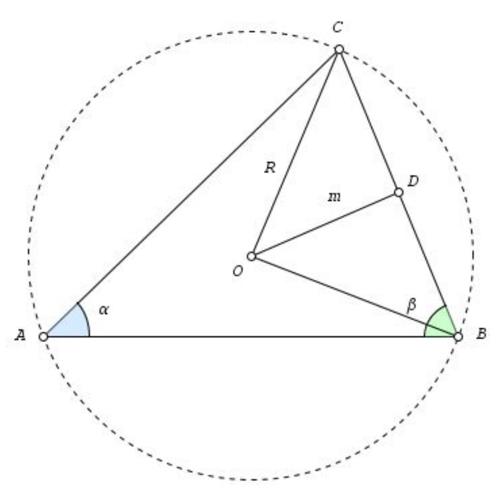
в) Всъщност трябва да изследваме функцията $f(\beta) = \sin\beta\sin(\alpha+\beta)$. Тъй като $f'(\beta) = \sin(\alpha+2\beta)$, то най-голямата стойност на $f(\beta)$ се получава при $\beta = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

Тогава ъглите на $\triangle ABC$ са α, $90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$ и $90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

Може да се използва и формулата $\sin\beta\sin(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{2}[\cos\alpha - \cos(\alpha+2\beta)]$, от която се вижда, че лявата й част е най-голяма, когато $\cos(\alpha+2\beta) = -1$, т. е. $\beta = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.



$\sphericalangle\beta - \textit{тъп}$

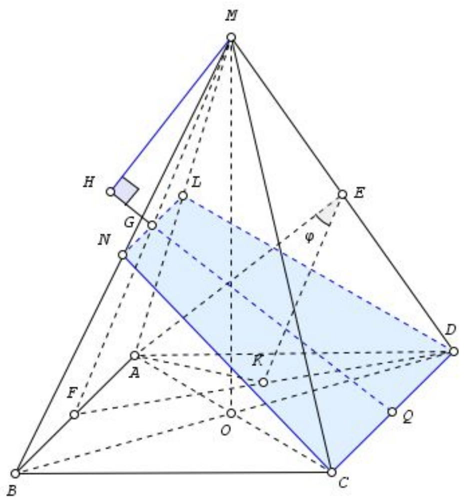


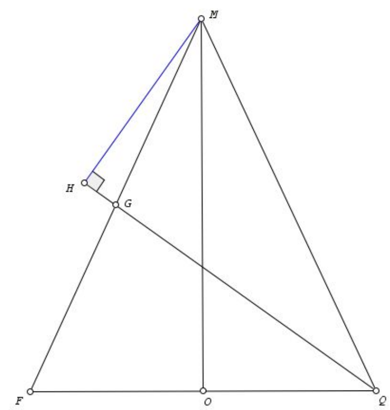
$\sphericalangle\beta - \textit{остър}$

Черт. 1

Задача 8. (5 т.) В правилната пирамида *ABCDM* , *AB=2a* и *AM = 3a*.
а) (2 т.) Да се намерят лицето на повърхнината и радиусът на вписаната в *ABCDM* сфера.
б) (1.5 т.) Да се намери косинусът на ъгъла между *AE* и *MF*, където *E* е среда на *MD*, а *F* е среда на *AB*.
в) (1.5 т.) Да се намери разстоянието от върха *M* до равнината (CDG), където *G* е среда на *MF*.

<u>*Решение:*</u>





Черт.2

а) Апотемата на пирамидата има дължина $\sqrt{(3a)^2 - a^2} = a\sqrt{8}$, а дължината на височината на пирамидата е $\sqrt{8a^2 - a^2} = a\sqrt{7}$. Тогава $S_1 = 4a^2 + 4.2a.a\sqrt{8}/2 = 4a^2(1+\sqrt{8})$ е лицето на повърхнината на пирамидата, а нейният обем е $V = 4a^2.a\sqrt{7}/3$. Тогава за радиуса r на вписаната сфера имаме $r = 3V/S_1 = a\sqrt{7}/(1+\sqrt{8})$.

б) През точка *E* построяваме *EK*||*MF*, където *K* лежи на основата на пирамидата. Очевидно *K* е среда на *DF*. Търсеният ъгъл е $\sphericalangle AEK$. За дължините на страните на $\triangle AEK$ имаме: $KE = \dfrac{MF}{2} = a\sqrt{2}$, $AK = \dfrac{DF}{2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. От известната формула за медиана в триъгълник $AE = \dfrac{\sqrt{2AM^2 + 2AD^2 - MD^2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{17}}{2}$. Тогава $\cos\sphericalangle AEK = \dfrac{AE^2 + EK^2 - AK^2}{2AE.EK} = \dfrac{5}{\sqrt{34}}$.

в) Нека *MF* и *MQ* са апотеми в стените *(ABM)* и *(CDM)* съответно. Тогава търсеното разстояние *MH* е дължината на височината към *QG* в $\triangle MGQ$ (защо?). Всяка медиана в триъгълник разполовява лицето му, т.е. $S_{QGM} = \dfrac{S_{FMQ}}{2} = \dfrac{MO.FQ}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{7}}{2}$. От друга страна $S_{QGM} = \dfrac{QG.MH}{2}$. Но QG е медиана в триъгълник MFQ, откъдето $QG = \sqrt{2MQ^2 + 2FQ^2 - FM^2} = 2a$. Тогава $\dfrac{a^2\sqrt{7}}{2} = \dfrac{2a.MH}{2}$ и $MH = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.