ВЕЛИКОТЪРНОВСКИ УНИВЕРСИТЕТ „СВ. СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЙ“
ФАКУЛТЕТ „МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА“
ТЕМА ЗА МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР
06.03.2022 г.

ВТОРА СЕКЦИЯ

(4. – 15.) Задачи с избираем отговор (само един от отговорите е верен)

4. Стойността на израза $4^{12}.2^{-8}.\left(\sqrt{2}\right)^{-6}.\left(\sqrt[3]{4}\right)^{-18}$ е равна на:

А) 8 **Б)** 4 **В)** 2 **Г)** 1

5. Изразът $\dfrac{x^2+5x-6}{2x^2-5x+3}$ при $x\neq 1$ и $x\neq\dfrac{3}{2}$ е тъждествено равен на:

А) $\dfrac{x-6}{2x-3}$ **Б)** $\dfrac{x+6}{2x+3}$ **В)** $\dfrac{x+6}{2x-3}$ **Г)** $\dfrac{x-6}{2x+3}$

6. Единият корен на квадратното уравнение $kx^2+x+k+1=0$ е $x_1=-\dfrac{1}{3}$. Другият корен е равен на:

А) 0 **Б)** 1 **В)** -1 **Г)** 2

7. Корените на уравнението $5^{2x+1}=5^{(x+1)^2}$ са:

А) $x=0$ **Б)** $x_1=-1$ и $x_2=0$ **В)** $x=2$ **Г)** $x_1=2$ и $x_2=6$

8. За аритметична прогресия е дадено, че $d=2$ и $S_{40}=520$. Първият член a_1 на прогресията е равен на:

А) 18 **Б)** -26 **В)** 26 **Г)** -10

9. Кое от посочените числа НЕ е решение на неравенството $x^2-2x-3\geq 0$?

А) $-\sqrt{2}$ **Б)** 3 **В)** $\sqrt{2}$ **Г)** π

10. По колко различни начина могат да се подредят 5 учебни предмета в програмата за един учебен ден при 5 часа за деня?

А) 45 **Б)** 120 **В)** 1000 **Г)** 15120

11. В триъгълник ABC са дадени $BC=9\,cm$ и $AC=3\,cm$. Построена е вътрешната ъглополовяща $CL(L\in AB)$ и $AL=2\,cm$. Дължината на страната AB е равна на:

А) $9\,cm$ **Б)** $6\,cm$ **В)** $8\,cm$ **Г)** $7\,cm$

12. Равнобедрен триъгълник с ъгъл при основата 30^0 е вписан в окръжност с радиус $6cm$. Периметърът на триъгълника е равен на:

А) $12+6\sqrt{3}\,cm$ **Б)** $6+\sqrt{3}\,cm$ **В)** $12+6\sqrt{2}\,cm$ **Г)** $12-3\sqrt{2}\,cm$

13. Дължината на хипотенузата на правоъгълен триъгълник с височина към нея $12\,cm$ и катет $15\,cm$ е равна на:

А) $25\,cm$ **Б)** $20\,cm$ **В)** $27\,cm$ **Г)** $30\,cm$

14. Ако $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ и $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, то стойността на $\sin 2\alpha$ е равна на:

А) $\dfrac{6}{5}$ **Б)** $\dfrac{5}{6}$ **В)** $-\dfrac{24}{25}$ **Г)** $\dfrac{24}{25}$

15. Дадена е правилна триъгълна пирамида с основен ръб $a = 6\ cm$ и околен ръб $l = 4\ cm$. Обемът на пирамидата е равен на:

А) $6\sqrt{2}\ cm^3$ **Б)** $6\sqrt{3}\ cm^3$ **В)** $6\ cm^3$ **Г)** $36\ cm^3$

ТРЕТА СЕКЦИЯ

(16. – 20.) Задачи за въвеждане на верния отговор

16. Ако x_1 и x_2 са корени на уравнението $x^2 - 4x + 2 = 0$, намерете стойността на израза $A = \log_2(x_1 + x_2) - 2^{1+\log_2(x_1x_2)}$.

17. Намерете стойността на израза $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) - \mathrm{tg}^2\alpha$.

18. Решете уравнението $x^2 + x = \sqrt{2x^2 + 2x}$.

19. Основата AB на равнобедрения триъгълник ABC е 8, а синусът на ъгъла при основата му е $\frac{\sqrt{14}}{4}$. Намерете медианата $AD\,(D \in BC)$ на триъгълника.

20. Диагоналите BA_1 и BC_1 на околни стени на правоъгълния паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ образуват с основата $ABCD$ ъгли, съответно равни на 30° и 60°, а дължината на AC е равна на $\sqrt{30}\ cm$. Намерете обема на паралелепипеда.

ЧЕТВЪРТА СЕКЦИЯ

(21. – 23.) Задачи, на които се изисква пълно и обосновано решение

21. Решете неравенството $\log_x \dfrac{4x+5}{6-5x} < -1$.

22. Даден е триъгълник ABC, за който $AB + AC = 13, BC = 7$ и $\angle BAC = 60^0$. Намерете радиуса на вписаната в триъгълника ABC окръжност.

23. Пирамида $ABCDE$ е с основа равнобедрен трапец $ABCD$, в който може да се впише окръжност. Височината на пирамидата минава през центъра на тази окръжност. Голямата основа на трапеца е $AB = 24\,cm$, а бедрото му е $BC = 15\,cm$. Намерете обема на пирамидата, ако лицето на околната ѝ повърхнина е $300\ cm^2$.

ПЕТА СЕКЦИЯ

Задача на журито: Да се намерят:

а) реалните корени на уравнението

$$(2x+7)\sqrt{2x+9} - (2x+9)\sqrt{2x+7} = x^2 + 7x + \frac{49}{4};$$

б) естественото число n, за което е изпълнено равенството

$$\frac{1}{9\sqrt{11} + 11\sqrt{9}} + \frac{1}{11\sqrt{13} + 13\sqrt{11}} + \frac{1}{13\sqrt{15} + 15\sqrt{13}} + \cdots + \frac{1}{(2n+7)\sqrt{2n+9} + (2n+9)\sqrt{2n+7}} = \frac{1}{9}.$$

Отговори на задачите

Задачи с избираем отговор. Само една от опциите е вярна:

4-В; 5-В; 6-Г; 7-А; 8-Б; 9-В; 10-Б; 11-В; 12-А; 13-А; 14-Г; 15-Б.

Задачи с въвеждане само на отговор:

16: $A = -2$; 17: 0; 18: $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1$;
19: $AD = 8$; 20: $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 27\ cm^3$.

Задачи, за които се изисква пълно решение:

21: $x \in (\frac{1}{2}, 1)$; 22: $r = \sqrt{3}$; 23: $V_{ABCDE} = 480\ cm^3$.

Задача на журито:

24: а) $x = -\frac{7}{2}$; 25: б) $n = 36$.