МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23 МАЙ 2025 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)

Отговорите на задачите от 1. до 15. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Дадени са векторът $\overrightarrow{PQ}(2;-1)$ и точката $Q(1;-2)$. Координатите на точката P са:

А) $(-1;-1)$

Б) $(1;-1)$

В) $(3;-3)$

Г) $(-3;3)$

2. Числото $2A3_{(16)}$ в десетична бройна система е равно на:

А) 672

Б) 675

В) 691

Г) 10800

3. Колко различни думи (включително и безсмислени) могат да се образуват чрез пренареждане на буквите в думата „АНАНАС“?

А) 720

Б) 240

В) 80

Г) 60

4. Плик съдържа 3 шоколадови и 2 ягодови бонбона. Дете вади един бонбон, записва си какъв е, връща го и повтаря опита общо три пъти. Каква е вероятността, че ще е извадил повече пъти ягодови, отколкото шоколадови бонбони?

А) $\frac{12}{125}$

Б) $\frac{4}{25}$

В) $\frac{36}{125}$

Г) $\frac{44}{125}$

5. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и M, N и P са вътрешни точки съответно от ръбовете AB, BC и DD_1. Видът на сечението на куба с равнината, минаваща през точките M, N и P е:

А) триъгълник

Б) четириъгълник

В) петоъгълник

Г) шестоъгълник

6. В правоъгълна координатна система са дадени точките $P(-2p;4)$ и $Q(p+6;-p)$, където $p \in R$. Стойността на p, за която правата, минаваща през точките P и Q е успоредна на ординатната ос, е:

А) $p=-4$

Б) $p=-2$

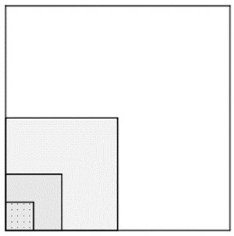
В) $p=2$

Г) $p=4$

7. Стойността на реалното число k, за която полиномът $p(x)=x^3+2x^2+3x-3k$ се дели без остатък на полинома $q(x)=x+3$ е равна на:

А) $k=-18$ Б) $k=-6$ В) $k=6$ Г) $k=18$

8. В квадрат със страна $4\ \text{cm}$ **последователно са вписани безброй много квадрати, като страната на всеки е равна на половината от страната на предходния. Сборът от лицата на всички квадрати е равен на:**



А) $\frac{128}{7}\ \text{cm}^2$

Б) $\frac{85}{4}\ \text{cm}^2$

В) $\frac{64}{3}\ \text{cm}^2$

Г) $32\ \text{cm}^2$

9. Границата $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\cos 2x}{2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}$ **е равна на:**

А) $\sqrt{3}$ Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ В) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Г) $-\sqrt{3}$

10. Материална точка се движи по закона $s(t)=t^3-3t^2+6t$**, където** s **е пътят в метри, а** t **времето в секунди. Колко метра е изминала точката до момента, в който нейното ускорение е** $24\ \text{m/s}^2$ **?**

А) 5 m Б) 24 m В) 51 m Г) 80 m

11. Втората производна на функцията $f(x)=(2x-1).(x+3)^2$ **е:**

А) $2(x+3)(3x+2)$

Б) $2(6x+11)$

В) $6x+11$

Г) 4

12. Радиусът на сфера, вписана в правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$ **с височина** $MO=4\ \text{cm}$ **и основен ръб** $AB=6\ \text{cm}$, е:

А) $\frac{2}{3}\ \text{cm}$ Б) $\frac{3}{2}\ \text{cm}$ В) $\frac{12}{5}\ \text{cm}$ Г) $\frac{17}{4}\ \text{cm}$

13. Основният ръб на правилна триъгълна пирамида е $2\sqrt{3}$ cm, а всички околни стени сключват с основата равни ъгли с големина 60°. Обемът на пирамидата е равен на:

А) 1 cm^3 Б) 2 cm^3 В) 3 cm^3 Г) 6 cm^3

14. За коя стойност на реалния параметър m функцията $f(x) = x^3 + mx^2 + 4x + 3$ има локален максимум в точката с абсциса $x = -2$?

А) 3 Б) 4 В) 8 Г) 16

15. В една кутия има 11 сини и един червен химикал, а в друга – 9 сини и един червен химикал. Случайно избран химикал от първата кутия е прехвърлен във втората, след което от втората кутия по случаен начин е избран един химикал. Каква е вероятността избраният химикал да е червен?

А) $\frac{13}{132}$ Б) $\frac{1}{11}$ В) $\frac{2}{11}$ Г) $\frac{1}{10}$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23 май 2025 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 16. до 18. включително запишете в листа за отговори!

16. Даден е триъгълник $\triangle ABC$ **с върхове** $A(2;-3)$, $B(8;-1)$ **и медицентър** $G(5;0)$**.**

а) Да се намерят координатите на върха C **на** $\triangle ABC$**.**

б) Да се намери общото уравнение на височината през върха C **на** $\triangle ABC$**.**

в) Да се намерят координатите на петата H **на височината през върха** C **на** $\triangle ABC$**.**

17. а) Определете стойността на числото b**, за която функцията**

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{-2x-2} & \text{за } x\in(-\infty;-1)\cup(-1;\infty) \\ b, & \text{за } x=-1 \end{cases}$$

е непрекъсната за $x=-1$

б) Намерете числото a**, равно на коефициента пред** x^3 **в полинома** $P(x)=(2-x)^4$**.**

в) Решете неравенството $x^4+7x^3-3x^2-23x-14<0$ **и определете кои от числата** a **и** b **са негови решения.**

18. Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{mx-2}{3-2x}$, където $m\in\mathbb{R}$.

а) Да се изследва функцията $f(x)$ и да се построи графиката ѝ при $m=3$.

б) Ако $m=-\dfrac{8}{3}$ да се намерят координатите на точките от графиката на функцията $f(x)$, в които допирателните към графиката на функцията $f(x)$, са успоредни на правата $g: y=-\dfrac{3}{4}x+5$?

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23 МАЙ 2025 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

№	Отговор	Брой точки
1.	А	3
2.	Б	3
3.	Г	3
4.	Г	3
5.	В	3
6.	Б	4
7.	Б	4
8.	В	4
9.	А	4
10.	Г	4
11.	Б	4
12.	Б	4
13.	В	4
14.	Б	4
15.	А	4
16.	а) $C\left(5;4\right)$ б) $h_c: 3x+y-19=0$ в) $H\left(6,8;-1,4\right)$	15
17.	а) $b=2$ б) $a=-8$	15

	в) $x \in (-7;-1) \cup (-1;2)$ a и b не са решение на неравенството	
18.	а) изследване на функцията и построяване на графиката б) $\left(3\frac{1}{2};2\frac{5}{6}\right)$ и $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{6}\right)$	15

Задача 16.

Решение:

а) Нека т. $C(x_C; y_C)$. Намиране, че $\overrightarrow{AG}(5-2;0-(-3))$, т.е. $AG(3;3)$,

$\overrightarrow{AB}(8-2;-1-(-3))$, т.е. $\overrightarrow{AB}(6;2)$ и

$\overrightarrow{AC}(x_C-2;y_C-(-3))$, т.е. $\overrightarrow{AC}(x_C-2;y_C+3)$.

Използване равенството $\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$, където P е произволна точка.

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$$

Получаване уравненията: $3=\frac{1}{3}(6+x_C-2)$ и $3=\frac{1}{3}(2+y_C+3)$.

Намиране, че $x_C=5$ и $y_C=4$ т.е. $C(5;4)$.

б) Намиране декартовото уравнение на правата AB

$y=kx+b$, $AB: y=\frac{1}{3}x-\frac{11}{3}$.

Височината през върха C е перпендикулярна на AB следователно има декартово уравнение $CH: y=-3x+b$.

Точката C лежи на височината и следователно $4=-3.5+b$, т.е. $b=19$.

Получаване $CH: y=-3x+19$, т.е. общото уравнение е $CH: 3x+y-19=0$.

в) $H = AB \cap CH$

$$\left|\begin{array}{l} y=\frac{1}{3}x-\frac{11}{3} \\ y=-3x+19 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}x-\frac{11}{3}=-3x+19 \\ y=-3x+19 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x-11=-9x+57 \\ y=-3x+19 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 10x = 68 \\ y = -3x + 19 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 6,8 \\ y = -3x + 19 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 6,8 \\ y = -3.6,8 + 19 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 6,8 \\ y = -1,4 \end{array} \right.$$

Следователно $H(6,8;-1,4)$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $C(5;4)$	8 точки
б) $CH: 3x + y - 19 = 0$	4 точки
в) $H(6,8;-1,4)$	3 точки

Задача 17.

Решение: а) Функцията е непрекъсната, ако

$$b = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{-2x - 2}$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{-2x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-3)}{-2\cancel{(x+1)}} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\Rightarrow b = 2$$

б) съответния елемент в развитието е $-\binom{4}{4-1} 2x^3 = -2\binom{4}{3} x = -8x^3 \Rightarrow a = -8$

в) Ако полиномът има рационални нули, те могат да са $\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14$

Прилагане схемата на Хорнер

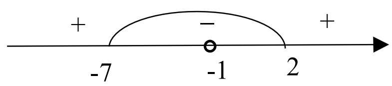
	1	**7**	**–3**	**–23**	**–14**
–1	1	6	–9	–14	0
–1	1	5	–14	0	

$$(x+1)^2 (x^2 + 5x - 14) < 0$$

$$(x+1)^2 (x-2)(x+7) < 0$$

Решаване неравенството с метода на интервалите

решението е $x \in (-7;-1) \cup (-1;2)$



И двете числа не са решение на неравенството.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) $b = 2$	4 точки
б) $a = -8$	3 точки
в) $x \in (-7;-1) \cup (-1;2)$ a и b не са решение на неравенството	8 точки

Задача 18.

Решение:

а) а) При $m = 3$ функцията е $f(x) = \dfrac{3x-2}{3-2x}$.

ДМ: $3 - 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{3}{2}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x < \frac{3}{2}}} \dfrac{3x-2}{3-2x} = +\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{3}{2} \\ x > \frac{3}{2}}} \dfrac{3x-2}{3-2x} = -\infty$.

$x = \dfrac{3}{2}$ е вертикална асимптота.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x-2}{3-2x} = -\dfrac{3}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{3}{2}$ е хоризонтална асимптота.

$f(0) = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow$ графиката на функцията пресича ординатната ос в $-\dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{3x-2}{3-2x} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ графиката на функцията пресича абсцисната ос в $\dfrac{2}{3}$.

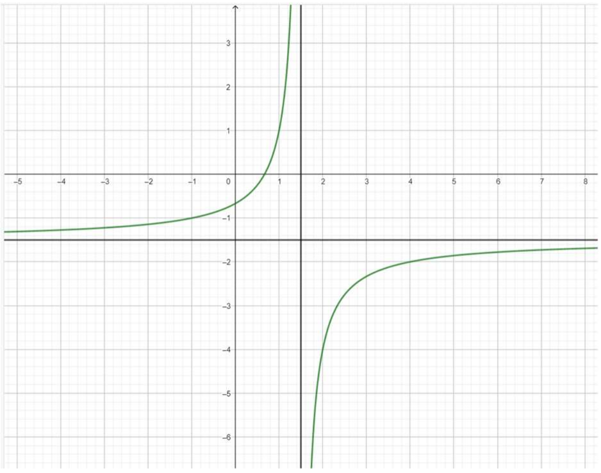
$f'(x) = \dfrac{3.(3-2x)-(3x-2).(-2)}{(3-2x)^2} = \dfrac{5}{(3-2x)^2} > 0$ за $x \in$ ДМ.

Следователно $f(x)$ няма локални екстремуми и е растяща за $x \in \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$.

$f''(x) = \dfrac{20(3-2x)}{(3-2x)^4} \Rightarrow$ за $x < \dfrac{3}{2}$ функцията е изпъкнала, а за $x > \dfrac{3}{2}$ функцията е вдлъбната.

За $x = \dfrac{3}{2}$ функцията е прекъсната.

Графика на функцията:



б) Разглеждаме функцията $f(x)=\dfrac{-\dfrac{8}{3}x-2}{3-2x}=\dfrac{8x+6}{6x-9}$ за $x\neq\dfrac{3}{2}$.

Търсим координатите на точките, в които допирателните към графиката на функцията $f(x)=\dfrac{8x+6}{6x-9}$, за $x\neq\dfrac{3}{2}$ са успоредни на правата g с уравнение $g: y=-\dfrac{3}{4}x+5$

Следователно $f'(x)=-\dfrac{3}{4}$.

$$f'(x)=\frac{8(6x-9)-(8x+6).6}{(6x-9)^2}=\frac{-108}{(6x-9)^2}$$

т.е. $\dfrac{-108}{(6x-9)^2}=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow(6x-9)^2=144$

Следователно $6x-9=12$ с корен $x=\dfrac{7}{2}$ и $f\left(\dfrac{7}{2}\right)=\dfrac{17}{6}$ т.е. $\left(3\dfrac{1}{2};2\dfrac{5}{6}\right)$ и

$6x-9=-12$ с корен $x=-\dfrac{1}{2}$ и $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{6}$ т.е. $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{6}\right)$.

Примерни критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

а) изследване на функцията и построяване на графиката	9 точки
б) За намиране на $\left(3\dfrac{1}{2};2\dfrac{5}{6}\right)$ и $\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{6}\right)$	6 точки