МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

22.05.2026 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

ЧАСТ 1 (Време за работа: 90 минути)

Отговорите на задачите от 1. до 15. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. За коя стойност на p **векторите** $\vec{a}(p;4)$ **и** $\vec{b}(2;-3)$ **са перпендикулярни?**

А) 6

Б) 5

В) $-\sqrt{13}$

Г) – 6

2. Декартовото уравнение на правата, минаваща през точките $A(-3;2)$ **и** $B(-2;-1)$**, е:**

А) $y=-3x-11$

Б) $y=-3x-7$

В) $y=\frac{3}{4}x+\frac{17}{4}$

Г) $y=\frac{3}{4}x+\frac{21}{4}$

3. Окръжността с уравнение $x^2-4x+y^2+6y-3=0$ **има център точка** O **и радиус** R**. Координатите на точка** O **и дължината на** R **са:**

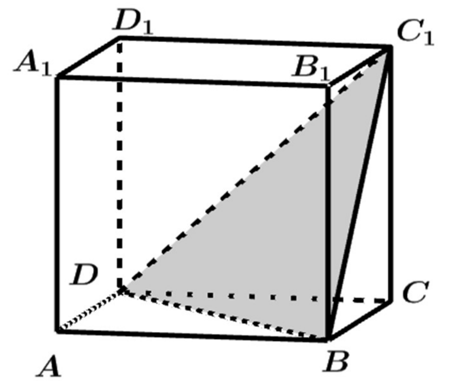
А) $O(2;3), R=2\sqrt{2}$

Б) $O(2;-3), R=4$

В) $O(-2;3), R=4$

Г) $O(2;-3), R=16$

4. В куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ **с ръб** 1**, разстоянието от върха** C **до равнината** $\left(DBC_1\right)$ **е равно на:**



А) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

В) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Г) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

5. Сборът от коефициентите в нормалния вид на полинома $M(x)=\left(x^3-3x+1\right)^3$ **е:**

А) – 1

Б) 1

В) 10

Г) 27

6. Вярното твърдение за функцията $f(x)=x+\sin x$**, дефинирана за** $x\in\left(-\infty;+\infty\right)$**, е:**

А) $f(x)$ е нечетна.

Б) $f(x)$ е ограничена.

В) $f(x)$ е четна.

Г) $f(x)$ е периодична.

7. Границата $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-\sqrt{4-x}}{x^2-9}$ **е равна на:**

А) 0

Б) $\dfrac{1}{6}$

В) $\dfrac{1}{12}$

Г) $+\infty$

8. Решенията на неравенството $-x^4+5x^3-x^2-21x+18<0$ **са:**

А) $x\in(-2;1)$

Б) $x\in(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$

В) $x\in(-2;1)\cup(3;+\infty)$

Г) $x\in(-\infty;-2)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$

9. Материална точка се движи по закона $S(t)=2\sin(\pi t)$**. Ако пътят** S **се измерва в метри, а времето** t **в секунди, то скоростта на точката при** $t=0$ s **е равна на:**

А) 0 m/s

Б) 1 m/s

В) π m/s

Г) 2π m/s

10. Броят на асимптотите на функцията $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ **е:**

А) 0

Б) 1

В) 2

Г) 3

11. Сладкарница предлага четири вида понички с различен пълнеж: с шоколад, с ванилия, с карамел и с ябълка. Клиент купува кутия с 6 понички за вкъщи. По колко различни начина може да напълни кутията, ако няма значение как са подредени поничките и може да взема по няколко от един вид?

А) 24

Б) 30

В) 84

Г) 256

12. Успоредник е с остър ъгъл α и със страни с дължини a cm и b cm. Обемът V на ротационното тяло, получено при въртенето на успоредника на $360°$ около страната с дължина a cm, е равен на:

А) $\pi.a^2.b.\cos^2\alpha \ \text{cm}^3$

Б) $\pi.a^2.b.\sin\alpha \ \text{cm}^3$

В) $\pi.a.b^2.\sin^2\alpha \ \text{cm}^3$

Г) $\pi.a.b^2.\cos\alpha \ \text{cm}^3$

13. За кои стойности на реалното число k функцията $f(x) = kx^3 + 3x^2 + kx + 1$ е растяща в интервала $(-\infty;\infty)$ за всяка реална стойност на x?

А) $k \in \left(-\infty; -\sqrt{3}\right]$

Б) $k \in \left[\sqrt{3}; \infty\right)$

В) $k \in \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$

Г) $k \in \left(0; \sqrt{3}\right]$

14. В таблицата е дадено разпределението на случайната величина X.

x	-2	0	1	3
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	μ	$\frac{3}{5}$	2μ

Математическото очакване на X е равно на:

А) $-\frac{1}{5}$

Б) $\frac{1}{5}$

В) $\frac{2}{5}$

Г) $\frac{4}{5}$

15. При производството на детайли за коли фирма А произвежда 1% некачествени детайли, а фирма Б – 2% некачествени детайли. Клиент поръчва детайл в магазин, в който 80% от детайлите са на фирма А, а останалите – на фирма Б. Ако закупен детайл е некачествен, вероятността да е произведен от фирма А, е:

А) $\frac{1}{125}$

Б) $\frac{3}{250}$

В) $\frac{1}{3}$

Г) $\frac{2}{3}$

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

22.05.2026 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

ЧАСТ 2 (Време за работа: 150 минути)

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 16. до 18. включително запишете в листа за отговори!

16. В правоъгълна координатна система са дадени точките $A(-4;4)$ и $B(10;2)$ и правата $l: x-y+8=0$.

а) Точка *C*, различна от точка *A*, лежи на правата l и на окръжността k с диаметър отсечката *AB*. Намерете каноничното уравнение на k и координатите на точката *C*.

б) През средата на отсечката *AB* е построена права *p*, успоредна на *l*. Намерете общото уравнение на p и разстоянието между правите *p* и *l*.

17. Дадена е функцията $f(x)=x^3+3x^2-3mx+5$, където m е реално число.

а) Ако точката $A(2;7)$ лежи на графиката на $f(x)$, решете уравнението $f(x)=0$.

б) Ако $m=3$, определете интервалите на монотонност, локалните екстремуми на функцията $f(x)$ и нейната най-малка стойност в интервала $x\in[-4;0]$.

в) Ако $m=3$, намерете $f''(x)$ и пресметнете границата $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f''\left(\frac{1}{x}\right)-5\right)^x$.

18. В триъгълната пирамида *ABCD* ръбът *CD* е перпендикулярен на равнината (ABC), $AC=BC=2\text{ cm}$ и $AB=CD$.

а) Ако $AB=2x$, докажете, че обемът на пирамидата се изразява с функцията $V(x)=\frac{2}{3}x^2.\sqrt{4-x^2}, x\in(0;2)$ и намерете максималния възможен обем на пирамидата.

б) Ако $\triangle ABC$ е равностранен и ъгълът между правата AD и равнината (BCD) е α, намерете $\operatorname{tg}\alpha$.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

22.05.2026 г.

ПРОФИЛИРАНА ПОДГОТОВКА

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

№	Верен отговор	точки
1	А	3
2	Б	3
3	Б	3
4	А	4
5	А	4
6	А	3
7	В	4
8	Г	4
9	Г	4
10	Г	3
11	В	4
12	В	4
13	Б	4
14	В	4
15	Г	4
16	а) $k:(x-3)^2+(y-3)^2=50$, т. $C(2;10)$ б) $p: x-y=0$, разстоянието между правите е $4\sqrt{2}$	15
17	а) $x_{1/2}=1, x_3=-5$ б) За $x\in(-\infty;-3)$ $f(x)\nearrow$, за $x\in(-3;1)$ $f(x)\searrow$, за $x\in(1;+\infty)$ $f(x)\nearrow$, $f_{\max}(-3)=32$, $f_{\min}(1)=0$, $\min\limits_{x\in[-4;0]} f(x)=f(0)=5$	15

	в) $f''(x)=6x+6$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f''\left(\frac{1}{x}\right)-5\right)^{x}=e^{6}$	
18	а) $\max V(x)=\frac{32}{27}.\sqrt{3}\text{ cm}^3$ б) $\text{tg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$	15

16. Примерно решение:

а) Ако точка $O(x_O;y_O)$ е среда на AB, то $x_O=\frac{-4+10}{2}=3; y_O=\frac{4+2}{2}=3$.

$AB=\sqrt{(10-(-4))^2+(2-4)^2}=10\sqrt{2}$

$k:(x-3)^2+(y-3)^2=\left(5\sqrt{2}\right)^2$.

$C:\begin{vmatrix} y=x+8 \\ (x-3)^2+(y-3)^2=50 \end{vmatrix}$

$C:\begin{vmatrix} y=x+8 \\ (x-3)^2+(x+5)^2=50 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y=x+8 \\ x^2+2x-8=0 \end{vmatrix}$.

$x_1=-4,\ x_2=2, y_1=4,\ y_2=10$

Едното решение на системата води до точка $A(-4;4)$, а другото до точка $C(2;10)$.

б) $p\,||\,l\Rightarrow p:x-y+c=0$. Точка $O(3;3)\in p\Rightarrow c=0, p:x-y=0$

Разстоянието d между p и l е равно на разстоянието от точка $O(3;3)$ до l.

Ако през $O(3;3)$ построим права $t\perp l$, тя ще има уравнение $t:x+y-6=0$.

$l\cap t=P(-1;7)\Rightarrow OP=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}.$

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи примерното решение:

а) 9 точки

$x_O=\frac{-4+10}{2}=3; y_O=\frac{4+2}{2}=3$	1 точка
$AB=10\sqrt{2}$	1 точка
$k:(x-3)^2+(y-3)^2=50$	1 точка

$C:\begin{vmatrix} y=x+8 \\ (x-3)^2+(y-3)^2=50 \end{vmatrix}$	1 точка
$C:\begin{vmatrix} y=x+8 \\ (x-3)^2+(x+5)^2=50 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y=x+8 \\ x^2+2x-8=0 \end{vmatrix}$, $x_1=-4,\ x_2=2, y_1=4,\ y_2=10$	4 точки
За точка $C(2;10)$	1 точка

б) 6 точки

За намиране на общото уравнение на p	3 точки
За намиране на разстоянието $OP=4\sqrt{2}$	3 точки

17. Примерно решение:

а) $f(2)=7 \Rightarrow m=3$

$x^3+3x^2-9x+5=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x-5)=0$

$(x-1)^2(x+5)=0$.

Решения са $x_{1/2}=1, x_3=-5$.

б) $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

За $x\in(-\infty;-3)$ $f(x)\nearrow$, за $x\in(-3;1)$ $f(x)\searrow$, за $x\in(1;+\infty)$ $f(x)\nearrow$

$f_{\max}(-3)=32$, $f_{\min}(1)=0$

$x\in[-4;-3]$ $f(x)\nearrow, x\in[-3;0]$ $f(x)\searrow$, $f(-4)=25, f(0)=5$.

$\min\limits_{x\in[-4;0]} f(x)=f(0)=5$

в) $f''(x)=6x+6$, $f''\left(\frac{1}{x}\right)-5=\frac{6}{x}+1$

$$\lim_{x\to\infty}\left(f''\left(\frac{1}{x}\right)-5\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x}+1\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{6}}\right)^{\frac{x}{6}.6}=e^6.$$

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи примерното решение:

а) 4 точки

$f(2)=7 \Rightarrow m=3$	1 точка
$x^3+3x^2-9x+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+5)=0$	2 точки
Решения са $x_{1/2}=1$, $x_3=-5$.	1 точка

б) 7 точки

$f'(x)=3x^2+6x-9$	1 точка
$f'(x)=3(x-1)(x+3)$ или намерени критичните точки	1 точка
За $x\in(-\infty;-3)$ $f(x)\nearrow$, $x\in(1;+\infty)$ $f(x)\nearrow$	1 точка
$x\in(-3;1)$ $f(x)\searrow$	1 точка
$f_{\max}(-3)=32$, $f_{\min}(1)=0$	1 точка
$x\in[-4;-3]$ $f(x)\nearrow, x\in[-3;0]$ $f(x)\searrow$. $f(-4)=25, f(0)=5$, $\min\limits_{x\in[-4;0]} f(x)=f(0)=5$	2 точки

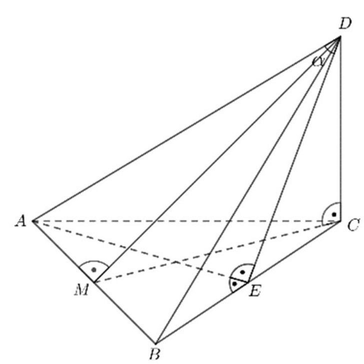
в) 4 точки

$f''(x)=6x+6$	1 точка
$f''\left(\frac{1}{x}\right)-5=\frac{6}{x}+1$	1 точка
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f''\left(\frac{1}{x}\right)-5\right)^x=e^6.$	2 точки

18. Примерно решение:

а) Нека точка M е средата на AB. $\triangle AMC$ и $\triangle CMD$ са правоъгълни. Тъй като $AM<AC \Rightarrow x\in(0;2)$. $CM=\sqrt{4-x^2}$ cm.

$V(x)=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}.CD=\frac{2}{3}x^2.\sqrt{4-x^2}$ cm^3 .



$V(x)=\frac{2}{3}x^2.\sqrt{4-x^2}=\frac{2}{3}\sqrt{x^4(4-x^2)},\ x\in(0;2)\ V'(x)=\frac{16x^3-6x^5}{3\sqrt{x^4(4-x^2)}}=\frac{16x-6x^3}{3\sqrt{4-x^2}}=\frac{-6x\left(x^2-\frac{8}{3}\right)}{3\sqrt{4-x^2}}$

$V'(x)=\frac{-6x\left(x-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}{3\sqrt{4-x^2}}$

За $x\in(0;2)$, $x\in\left(0;\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ $V(x)\nearrow$, $x\in\left(\frac{2\sqrt{6}}{3};2\right)$ $V(x)\searrow$, $\max V(x)=V\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{32}{27}.\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

б) Построяваме AE – височина и медиана в $\triangle ABC$. Тогава $AE\perp(BCD)$. Проекцията на AD в равнината (BCD) е ED и $\sphericalangle AED=90^\circ$, а $\sphericalangle ADE=\alpha$, $\text{tg}\alpha=\frac{AE}{ED}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи примерното решение:

а) 10 точки

$x\in(0;2)$	1 точка
$CM=\sqrt{4-x^2}$ cm	1 точка
$V(x)=\frac{2}{3}x^2.\sqrt{4-x^2}\ \text{cm}^3$	2 точки
$V'(x)=\frac{-6x\left(x-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\left(x+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)}{3\sqrt{4-x^2}}$	2 точки
За $x\in(0;2)$, $x\in\left(0;\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ $V(x)\nearrow$, $x\in\left(\frac{2\sqrt{6}}{3};2\right)$ $V(x)\searrow$	2 точки
$\max V(x)=V\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{32}{27}.\sqrt{3}\ \text{cm}^3$	2 точки

в) 5 точки

За построяване на проекцията на AD в (BCD) и обосновка	2 точки
За посочване на $\sphericalangle ADE=\alpha$	1 точка
За намиране на катетите в $\triangle ADE$	1 точка
За намиране на $\text{tg}\alpha=\frac{\sqrt{15}}{5}$	1 точка