

Отговори и кратки решения

Първа част:

1зад.	2зад.	3зад.	4зад.	5зад.	6зад.	7зад.	8зад.	9зад.	10зад.	11зад.	12зад.
б	$\frac{\Gamma}{\sqrt{2009}} - 1$	в	а	б	в	б	в	б	а	в	$\frac{\Gamma}{R^2\sqrt{3}}$

Втора част:

13зад. Ако $k = 0$, то $x = 0$, но то не е естествено число. Нека $k \neq 0$. Тогава $x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4k^2}}{k}$ за

$k \in [-5; 0) \cup (0; 5]$ (тогава D е неотрицателна). След непосредствена проверка се получава, че при $k = 5$, $x = 2$; $k = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 4$; $k = 3$, $x = 6$

Отговор: 3; 4; 5

14зад. ДС: $x \neq 0$; $x > -1$. След полагане $y = \log_8(x+1)$ получаваме уравнението $3y^2 - 8y - 3 = 0$, което има корени $y_1 = -\frac{1}{3}$; $y_2 = 3$. След решаване на двете основни логаритмични уравнения получаваме

$$x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = 511$$

Отговор: $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 511$

Трета част:

15зад. а) $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)^2 = 0$, тогава $\frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2} - 3 = 0$, от където $k = 3$

б) Полагаме $\frac{x}{2} - \frac{3}{x} = y$, при $x \neq 0$. Повдигаме двете страни на квадрат и след няколко преобразования

получаваме $y^2 + 3 = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{18}{x^2}\right)$, след което стигаме до уравнението $2y^2 - 7y + 6 = 0$, за което

$y_1 = \frac{3}{2}$; $y_2 = 2$. При $y = \frac{3}{2}$ корените на даденото уравнение са $\frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$, а при $y = 2$ са $2 \pm \sqrt{10}$

16зад. От това, че α, β, χ образуват аритметична прогресия следва, че

$$\beta = \frac{\alpha + \chi}{2} = \frac{180^\circ - \beta}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ. \text{ Тогава } \alpha = 60^\circ - x, \text{ а } \chi = 60^\circ + x. \text{ Получаваме}$$

$$\cos(60^\circ - x) + \operatorname{tg} 60^\circ + \sin(60^\circ + x) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1; \quad 2\sin(x + 45^\circ)\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1); \quad \sin(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) = \sin 75^\circ; \quad x + 45^\circ = 75^\circ;$$

$$x = 30^\circ; \quad \alpha = 30^\circ; \quad \chi = 90^\circ.$$

17зад. а) Тъй като $\angle PMQ + \angle AMQ + \angle BMP = 180^\circ$, то $\angle PMQ = 90^\circ$.

Нека $CN = NB$. Тогава $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$. Но $MN = \frac{1}{2}QP$ ($\angle PMQ = 90^\circ$, $QN = NP$) и $AC = PQ$, $BC = 3AC$.

б) Понеже $AMQC$ е висан в окръжност, то $\angle CAM = \angle MQP = \angle QMN = \alpha$.

Тогава $\angle MNB = 2\alpha$ (външен за $\triangle MNQ$). Тъй като MN е средна отсечка в $\triangle ABC$, то $MN \parallel AC$. След. $\angle ACB = 2\alpha$.

Означаваме $\angle ABC = \beta \Rightarrow \beta = 180^\circ - 3\alpha$. От

$BC = 3AC$ и синусовата теорема за $\triangle ABC$

намираме, че $\sin \alpha = 3 \sin \beta$, т.е.

$$\sin \alpha = 3 \sin(180^\circ - 3\alpha) = 3 \sin 3\alpha, \quad \sin \alpha = 3 \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha - 1), \text{ от където } \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}. \text{ Тогава } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \text{ От правоъгълния триъгълник } MPQ \text{ получаваме } \frac{MP}{MQ} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \sqrt{2}.$$

