

Великденско математическо състезание - 26.04.2009г.

10 клас

Времето за решаване е 120 минути.

Регламент: Всяка задача от 1 до 15 има само един верен отговор. "Друг отговор" се приема за решение само при отбелязан верен резултат. Задачите от 1 до 5 се оценяват с по 3 точки, от 6 до 10 с по 5 точки и от 11 до 15 с по 7 точки..

Организаторите Ви пожелават успех !

1 зад. Стойността на израза $\frac{1^{-1} + 2^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 5(-4)^{-1} + (0,5)^{-2}}$ е:

- а) $\frac{1}{4}$ б) $\frac{1}{6}$ в) $-\frac{1}{10}$ г) друг отговор

2 зад. Частното на $\sqrt{2} : \sqrt[3]{2}$ е :

- а) $\sqrt{2}$ б) $\sqrt[3]{2}$ в) $\sqrt[6]{2}$ г) друг отговор .

3 зад. Стойността на израза $\frac{\cos(180^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha) \cot g(180^\circ - \alpha)}$ е :

- а) 1 б) -1 в) $\operatorname{tg} \alpha$ г) друг отговор

4 зад. В $\triangle ABC$ $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 8$. Ако $AB = 10$ см , страната AC е :

- а) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ б) $10\sqrt{2}$ в) $5\sqrt{2}$ г) друг отговор.

5 зад. Ако страните на триъгълник са 5, 16 и 19, то триъгълникът е :

- а) правоъгълен б) тъпоъгълен в) остроъгълен г) друг отговор

6 зад. Дадени са числата $a = \log_5 3$, $b = \log_2 0,7$, $c = \log_6 11$. Кое неравенство е вярно :

- а) $a < b < c$ б) $b < c < a$ в) $b < a < c$ г) друг отговор

7 зад. Решенията на неравенството $\frac{(x^2 - 8x + 16)(1 - x)}{(x + 5)(x - 3)} \geq 0$ са:

- а) $(-5, 1] \cup (3, +\infty)$ б) $(-\infty, -5] \cup [1, 3]$ в) $(-\infty, 5) \cup [1, 3]$ г) друг отговор.

8 зад. Катетите на правоъгълен $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) са 3 см и 4 см. CH и CL ($H, L \in AB$) са съответно височина и ъглополовяща през върха C . Дължината на отсечката HL е :

- а) $\frac{37}{35}$ б) 2 в) $\frac{12}{35}$ г) друг отговор

9 зад. Стойността на израза $3 \sin 15^\circ \sin 75^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\sin^2 15^\circ - \cos^2 165^\circ}$ е:

- а) $-\frac{1}{4}$ б) $\frac{7}{4}$ в) $\frac{3 - 2\sqrt{3}}{4}$ г) друг отговор.

10 зад. Ако $18x^2y$ и $10xy$ са точни квадрати, където x и y са естествени числа, то най-малката възможна стойност на $x+y$ е :

- а) 16 б) 36 в) 34 г) друг отговор.

11 зад. Стойността на $\left(49^{\log_7 5} + 8^{\log_2 \sqrt{3}}\right) \left(5 \cdot \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt[3]{9} - 3^{\log_4 8}\right)$ е :

- а) 598 б) $45\sqrt{3} - 2$ в) $382 - 200\sqrt{3}$ г) друг отговор.

12 зад. Корените на уравнението $\sqrt{5-x} \left(3^{x^2-7,2x+3,9} - 9\sqrt{3}\right) = 0$ са :

- а) $\frac{1}{5}$ б) $\frac{1}{5}, 5, 7$ в) $\frac{1}{5}, 5$ г) друг отговор.

13 зад. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $(a-1)3^{2x} - (2a-1)3^x - 1 = 0$ има два различни реални корена :

- а) $(1, +\infty)$ б) $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ в) $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ г) друг отговор.

14 зад. Точката I е център на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност. Ако $AI=15$, $BI=5\sqrt{7}$, $AB=25$, то AC и BC са съответно:

- а) 16, 21 б) 23, 36 в) 23, 21 г) друг отговор

15 зад. Даден е равнобедрен трапец с основи 16 и 4, в който може да се впише окръжност. Радиусът на описаната около трапеца окръжност е :

- а) $\frac{5\sqrt{41}}{2}$ б) $2\sqrt{41}$ в) 4 г) друг отговор.

10 клас

1a); 2в); 3б); 4a); 5б); 6в); 7г) $(-\infty, -5) \cup [1, 3) \cup \{4\}$; 8в); 9б); 10г) 7; 11a); 12в); 13б); 14в); 15г) $\frac{5\sqrt{41}}{4}$

ОТГОВОРИ:**Решения:****1 зад.**

$$\frac{1^{-1} + 2^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} + 5(-4)^{-1} + (0,5)^{-2}} = \frac{1 + \frac{1}{4}}{\frac{9}{4} - \frac{5}{4} + 4} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{9}{4}} = \frac{5}{9}$$

2 зад

$$\sqrt{2} : \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{\frac{2^3}{2^2}} = \sqrt[6]{2}$$

3 зад.

$$\frac{\cos(180^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha) \cot g(180^\circ - \alpha)} = \frac{-\cos \alpha (-\cot g \alpha)}{\cos \alpha (-\cot g \alpha)} = -1$$

4 зад.

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : 3 : 8. \quad \alpha = k, \beta = 3k, \gamma = 8k$$

$$k + 3k + 8k = 180^\circ \quad k = 15^\circ \quad \alpha = 15^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 120^\circ$$

$$\frac{10}{\sin 120^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$$

6 зад.

$$a = \log_5 3, b = \log_2 0,7, c = \log_6 11.$$

$$0 < \log_5 3 < 1 \quad \log_2 0,7 < 0 \quad \log_6 11 > 1$$

$$b < a < c$$

7 зад.

$$\frac{(x^2 - 8x + 16)(1 - x)}{(x + 5)(x - 3)} \geq 0$$

$$\frac{(x - 4)^2 (x - 1)}{(x + 5)(x - 3)} \leq 0$$

$$(-\infty, -5) \cup [1, 3) \cup \{4\}$$

8 зад.

$$AB = 5, AL = \frac{15}{7}, BL = \frac{20}{7}, AH = \frac{9}{5}, HL = AL - AH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{75 - 63}{35} = \frac{12}{35}$$

9 зад.

$$3 \sin 15^\circ \sin 75^\circ - \frac{\sin 60^\circ}{\sin^2 15^\circ - \cos^2 165^\circ} = \frac{3}{2} 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ} = \frac{3}{2} \sin 30^\circ + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos 30^\circ} =$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{2} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

10 зад.

Щом $18x^2y$ е точен квадрат следва, че $2y$ е точен корен. Н.м $y=2$. Тогава $10x^2$ е точен квадрат за н.м $x=5$.
Следователно $x+y=7$

11 зад.

$$\begin{aligned} & \left(49^{\log_7 5} + 8^{\log_2 \sqrt{3}}\right) \left(5 \cdot \log_{\sqrt[3]{3}} 3\sqrt[3]{9} - 3^{\log_4 8}\right) = \left(7^{2\log_7 5} + 2^{3\log_2 \sqrt{3}}\right) \left(5 \cdot 3 \cdot \frac{5}{3} \log_3 3 - 3^{\frac{3}{2} \log_2 2}\right) = \\ & = \left(25 + \sqrt{3}^3\right) \left(25 - \sqrt{3}^3\right) = 625 - 27 = 598 \end{aligned}$$

12 зад.

$$\sqrt{5-x} \left(3^{x^2-7,2x+3,9} - 9\sqrt{3}\right) = 0$$

ДМ $x \leq 5$

$$\left(3^{x^2-7,2x+3,9} - 9\sqrt{3}\right) = 0$$

$$3^{x^2-7,2x+3,9} = 3^{\frac{5}{2}}$$

$$x^2 - 7,2x + 3,9 = 2,5$$

$$\mathbf{x=5 \text{ или }} 10x^2 - 72x + 14 = 0$$

$$5x^2 - 36x + 7 = 0$$

$$D = 324 - 35 = 289$$

$$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = 7 \notin DM$$

Зад.13

Полагаме $3^x = u$ и пол. $(a-1)u^2 - (2a-1)u - 1 = 0$. Това уравн. трябва да има 2 полож. корена, т.е. да се реши

$$\text{системата} \begin{cases} a-1 \neq 0 \\ D > 0 \\ u_1 + u_2 > 0 \\ u_1 u_2 > 0 \end{cases}$$

Зад 14.

От косинусова теорема за $\triangle ABI$ $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{10}$ откъдето $\cos \alpha = \frac{31}{50}$. Ако доп.т на вп окр до АВ, ВС, АС са

съответно М, N, Р, намираме $AM=AP=\frac{27}{2}$, $BM=BN=\frac{23}{2}$ (от правоъгълни триъгълници АМІ и ВМІ). Озн.

$CP=CN=x$, прилагаме кос.т. за $\triangle ABC$ и намираме $x=\frac{19}{2}$. Тогава $AC=23$, $BC=21$

Зад.15

От описан четр. следва $AD=BC=10$. Ако СМ е височина, от $\triangle BMC$ се намира $MB=6$ и $CM=8$ $\sin \beta = \frac{4}{5}$ и от

$\triangle AMC$ – $AM=10$, $AC=2\sqrt{41}$. Прилагаме синусова теорема за $\triangle ABC$ и намираме

$$\frac{AC}{\sin \beta} = 2R$$

$$R = \frac{2AC}{\sin \beta} = \frac{5\sqrt{41}}{4}$$